KATA PENGANTAR

Secara nyata matematika sangat diperlukan dalam kehidupan manusia baik dalam kehidupann sehari-hari maupun ilmu pengetahuan dan teknologi. Oleh karena itu matematika diajarkan sejak anak sekolah dasar (SD). Guru yang bertanggung jawab membekali matematika untuk anak SD tersebut perlu dibekali materi matematika yang cukup sehingga memadai untuk mengajarkan matematika di SD. Pada saat sekarang ini masih terasa kekurangan buku matematika yang berbahasa Indonesia untuk calon guru sekolah dasar.

Untk mengisi kekurangan buku matematika tersebut, buku ajar ini disusun dalam rangka program penulisan bukun ajar untuk memenuhi kurikulum PGSD Jurusan Ilmu Pendidikan FKIP Universiatas Tadulako tahun 2011-2012, sehingga posisi buku ini merupakan perpanjangan tangan kurikulum di lapangan. Karena itu isi buku ini bersesuaian dengan materi yang terdapat dalam Silabus matematika dasar untuk program PGSD tahun 2011-2012.

Dalam buku ajar ini, penyelesaian masalah matematika relative cukup banyak. Kegiatan belajar mengajar 1 yang memuat logika sangat terkait dengan kegiatan belajar mengajar 5 tentang pemecahan masalah. Kedua kegiatan belajar mengajar tersebut dipisahkan dengan maksud bahwa pada mulanya, mahasiswa diperkenalkan cara menalar dalam matematika sehingga dapat memahami bagaimana sebenarnya penalaran dalam matematika itu.

Kegiatan-kegiatan belajar mengajar berikutnya memberikan pengalaman nyata kepada mahasiswa bagaimana mempelajari matematika dan menyelesaikan masalahnya. Setelah mahasiswa memperoleh pengalaman bagaimana mempelajari matematika dan menyelesaaikan masalahnya, kemudian diakhiri dengan penghayatan bagaimana sebenarnya dalam memahami masalah, yang kemudian merencanakan penyelesaian dan melaksanakan penyelesaiannya yang kesemuanya di termuat dalam kegiatan belajar mengajar 5. Dengan susunan yang demikian ini diharapkan mahasiswa calon guru SD akan mampu mengajarkan matematika dengan menggunakan strategi penyelesaian masalah kepada siswa-siswanya di SD bilak kelak mereka menjalankan tugasnya sebagai guru.

Dalam buku ajar ini, setiap kegaiatan belajar mengajar, setelah pembahasan pokok-pokok bahasan maupun sub-sub pokok bahasan selalu diberikan latihan soal.

Terima kasih kami ucapkan kepada Ketua Program Studi Pendidikan Guru Sekolah Dasar, serta pimpinan Fakultas Keguruan Ilmu Pendidikan yang telah memberikan kepercayaan kepada kami sabagai penulis buku ajar ini.

Mudah-mudahan buku ajar ini dapat memberikan manfaat dan memberikan bekal matematika yang cukup bagi calon guru di SD serta dapat menunjang kegiatan pembelajaran yang diamanatkan oleh kurikulum program PGSD tahun 2011-2012.

Kami menyadari kekurangan buku ajar ini, oleh karena itu kritik dan saran dengan maksud memperbaiki buku ajar ini, tentu sangat kami harapkan dari semua pihak.

Zainuddin
Akina

LOGIKA

Zainuddin
Akina

Kegiatan belajar mengajar 1 ini akan membahas tentang logika. Sesuai dengan kebutuhan maka kegiatan belajar mengajar 1 ini mencakup dua pokok bahasan, yaitu pokok bahasan I tentang konjungsi dan disjungsi, serta pokok bahsan II tentang implikasi dan biimplikasi.

Pada pokok bahasan 1 akan dibahas tentang, konjungsi, disjungsi, serta negasi dari konjungsi dan disjungsi. Pada pokok bahasan II akan dibahas tentang, ipmlikasi, negasi suatu implikasi, konvers, invers dan kontarapositif dari suatu implikasi, biimplikasi, dan negasi dari suatu biimplikasi.

Indikator yang diharapkan diacapai mahasiswa setelah mempelajari kegiatan belajar mengajar 1 ini adalah mahasiwa mampu;

1. membuat contoh-contoh pernyataan dan kaliman yang bukan pernyataan;
2. menentukan negasi suatu pernyataan;
3. menentukan nilai kebenaran dari konjungsi dan disjungsi serta dapat menentukan negasinya;
4. menentukan nilai kebanaran suatu implikasi dan negasinya;
5. menentukan invers, konvers dan kontrapositif dari suatu implikasi;
6. menentukan nilai kebenaran suatu biimplikasi dan negasinya;
7. memilih pernyataan majemuk yang merupkan tautologi atau kontradiksi;
8. menggunakan aturan penarikan kesimpulan untuk memperoleh argumen yang absah;

Agar mahasiswa dapat menguasai kegiatan belajar mengajar 1 ini, maka baca dan pelajari secermat mungkin, baik pokok bahasan maupun sub-sub pokok bahasan yang disajikan berikut.

A. Konjungsi dan Disjungsi

Pernyataan dan Negasinya. Perhatikan contoh-contoh kalimat berikut ini:

1. Sebuah segiempat mempunyai empat sisi
2. Ibu Kota Propinsi Sulawesi Tengah adalah Palu
3. 9 adalah suatu bilangan prima
4. 12 kurang dari 7

Kita dapat menentukan nilai kebenaran (benar atau salah) dari kalimat-kalimat tersebut. Kalimat-kalimat (1) dan (2) bernilai benar, sedangkan kalimat-kalimat (3) dan (4) bernilai salah. Kalimat yang mempunyai nilai benar atau nilai salah saja adalah kalimat yang menerangkan (kalimat deklaratif). Kalimat yang menerangkan inilah yang disebut *pernyataan*.

Pernyataan adalah kalimat yang bernailai benar atau bernilai salah, tetapi tidak sekaligus bernilai kedua-duanya.

Kalimat yang tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya bukan merupakan pernyataan. Cotoh-contoh berikut ini adalah kalimat yang *bukan pernyataan*.

1. Apakah Ajid berada di rumahmu? *(kalimat Tanya).*
2. Alangkah indahnya lukisan ini *(kalimat yang mengungkapkan suatu perasaan).*
3. Tutuplah pintu itu! *(kalimat perintah)*
4. Semoga Anda lekas sembuh *(kalimat harapan)*

Kalimat-kalimat tersebut tidak bernilai benar dan juga tidak bernilai salah. Kalimat-kalimat seperti ini tidak dibicarakan dalam buku ajar ini. Kalimat yang dibicarakan dalam buku ajar ini adalah kalimat yang merupakan pernyataan.

Untuk menyingkat penulisan, suatu pernyataan diberi lambang (simbol) dengan huruf alfabet kecil, a, b, c, . . . atau lainnya,sedangkan untuk nilai Benar dan Salah berturut-turut disingkat dengan B dan S.

Contoh 1.1

1. "Sebuah segitiga mempunyai tiga sisi" diberi lambang "a"
2. "9 adalah suatu bilangan prima" diberi lambang "b"
3. "15 terbagi habis oleh 3" diberi lambang "p"

Pada contoh ini pernyataan a bernilai B (benar), pernyataan b bernilai S (salah) dan pernyataan p bernilai B. Perhatikan pada contoh (2), "b" menyatakan "9 adalah suatu bilangan prima", dan pernyataan "b" ini bernilai S, sedangkan pernyataan "9 bukan suatu bilangan prima" merupakan negasi (sangkalan/ingkaran) dari pernyataan "9 adalah suatu bilangan prima". Selanjutnya"negasi dari b" dilambangkan "-b". Pada contoh (3) di atas, "p" menyatakan "15 terbagi habis oleh 3" maka "-p" menyatakan "15 tidak terbagi habis oleh 3". Tampak bahwa "p" bernilai B dan "-p" bernilai S.

Negasi suatu pernhyataan adalah suatu pernyataan yang bernilai salah apabila pernyataan semula bernilai benar, dan bernilai benar apabila pernyataan semula bernilai salah.

Contoh 1.2

1. Apabila “a” menyatakan “Tembok itu berwarna putih” maka “-a” adalah “Tembok itu tidak berwarna putih”. Dapat juga dikatakan “Tidaklah benar tembok itu berwarna putih”.
2. Jika “a” menyatakan “Mawan suka mangga” maka “-d” adalah “Mawan tidak suka mangga”
3. Jika “p” melambangkan “Hana lebih tinggi daripada Ati” maka “-p” menyatakan “Hana tidak lebih tinggi daripada Ati”

Pada contoh (1) tersebut pernyataan “Tembok itu berwarna hitam” tidak merupakan ingkaran (negasi) dari “Tembok itu berwarna putih”. Sebab apabila kenyataannya “Tembok itu berwarna hijau” maka dua pernyataan tersebut semuanya bernilai salah. Demikian pula pada contoh (3), negasi dari “Hana lebih tinggi daripada Ati” bukan “Hana lebih rendah daripada Ati”. Sebab jika kenyataannya Hana sama tinggi dengan Ati maka pernyataan tersebut semuanya bernilai salah.

Pernyataan dan negasinya mempunyai nilai-nilai kebenaran yang selalu berbeda, artinya pernyataannya bernilai B maka negasinya bernilai S dan sebaliknya jika pernyataannya bernilai S maka negasinya bernilai B. Hal ini dapat dibuat tabel sebagai berikut

Tabel 1.1
Nilai Kebenaran dan Negasi

a	-a	-(-a)
S	B	S
B	S	B

Pernyataan Majemuk: Pernyataan majemuk merupakan rangkaian dari dua pernyataan atau lebih dengan kata penghubung. Pernyataan-pernyataan yang dirangkai masing-masing disebut *pernyataan tunggal*. Kata penghubung yang dimaksudkan adalah “dan”. “atau”, Jika . . . maka , , ,” dan “jika hanya jika”. Lambang kata-kata penghubung tersebut dapat dilihat pada daftar sebagai berikut.

Tabel 1.2
Lambang (Simbol) Kata Penghubung

Kata Penghubung	Lambang
dan	Λ
atau	V
jika maka	$\Rightarrow$
jika hanya jika	$\Leftrightarrow$

1. Konjungsi

Contohnya “7 adalah bilangan prima dan genap”. Pernyataan ini merupakan pernyataan majemuk karena pernyataan itu merupakan rangkaian dua pernyataan, yaitu “7 adalah bilangan prima” dan “7 adalah bilangan genap”. Jika pernyataan “7 adalah bilangan prima” diberi lambang “a” dan “7 adalah bilangan genap” diberi lambang “b” maka pernyataan majemuk itu dilambangkan dengan “a Λ b” (dibaca “a dan b”).

Pernyataan majemuk yang hanya menggunakan kata penghubung “dan” (Λ) disebut konjungsi. Nilai kebenaran dari suatu pernyataan majemuk tergatung dari nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan tunggalnya. Nilai kebenaran dari konjungsi dua pernyataan ditentukan dengan aturan sebagai berikut.

Konjungsi dua pernytaan a dan b (ditulis “a Λ b” dibaca “a dan b”) bernilai B (benar), sedangkan untuk nilai-nilai kebenaran a dan b lainnya, “a Λ b” bernilai S (salah).

Dengan memperhatikan bahwa “satu pernyataan mempunyai dua kemungkinan nilai (B atau S) maka aturan tersebut dapat dinyatakan dalam tabel nilai kebenaran (Tabel 1.3) sebagai berikut.

Tabel 1.3
Nilai Kebenaran Konjungsi

a	B	a Λ b	
B	B	B	Baris ke-1
B	S	S	Baris ke-2
S	B	S	Baris ke-3
S	S	S	Baris ke-4

Contoh 1.3

1. a = Jakarta adalah Ibu Kota Negara RI (B)
   b = Bandung terletak di pulau Jawa (B)
   a Λ b = Jakarta adalah Ibu Kota Negara RI dan Bandung terletak di pulau Jawa (B)
   Sesuai baris ke-1, Tabel 1.3
2. p = 7 adalah bilangan prima (B)
   q = 7 adalah bilangan genap (S)
   p Λ q = 7 adalah bilangan prima dan y7 adalah bilangan genap (S)
   Sesuai baris ke-2 Tabel 1.3
3. m = 8 lebih besar dari 13 (S)
   n = matahari terbit dari Timur (B)
   m Λ n = 8 lebih besar dari 13 dan matahari terbit dari Timur (S)

Sesuai baris ke-3, Tabel 1.3

4. c = Seekor kerbau berkaki seribu (S)

d = 13 terbagi habis oleh 4 (S)

$c \wedge d$ = Seekor lembu berkaki seribu dan 13 terbagi habis oleh 4 (S)

Sesuai barias ke-4, Tabel 1.3

Perhatikan bahwa nilai kebenaran dari konjungsi ditentukan oleh nilai-nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan tunggalnya dan tidak perlu memperhatikan ada tidaknya hubungan antara pernyataan-pernyataan tunggalnya.

2. Disjungsi

Pernyataan majemuk yang hanya menggunakan kata penghubung "atau" (V) disebut disjungsi. Jika a dan b masing-masing pernyataan maka disjungsi a dan b "a V b" dan dibaca "a atau b".

Misalnya a = Ajid pergi ke pasar, dan

b = Ajid bermain bola

a V b = Ajid pergi ke pasar atau Ajid bermain bola

Nilai kebenaran dari disjungsi ditentukan oleh nilai-nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan tunggalnya dengan aturan berikut ini.

> Disjungsi dua pernyataan a dan b (ditulis "a V b" dan dibaca "a atau b") bernilai S jika hanya dua pernyataan a dan b masing-masing S, sedangkan untuk nilai-nilai kebanaran a dan b lainnya "a V b" bernilai B.

Sesuai dengan adanya dua kemungkinan bagi suatu pernyataan maka aturan tersebut dinyatakan dalam tabel nilai kebenaran disjungsi (Tabel 1.4) sebagai berikut.

Tabel 1.4
Nilai Kebenaran Disjungsi

a	b	a V b
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Aturan atau tabel nilai kebenaran tersebut dapat pula dikatakan bahwa disjungsi dua pernyataan bernilai B apabila sekurang-kurangnya satu dari pernyataan-pernyataan tunggalnya bernilai B.

Contoh 1.4

1. a = Surabaya terletak di provinsi Jawa Timur (B)

   b = Satu minggu terdiri dari tujuh hari (B)

   a V b = Surabaya terletak di provinsi Jawa Timur atau satu minggu terdiri dari tujuh hari (B). Sesuai baris ke-1, Tabel 1.4

2. u = 5 adalah bilangan prima (B)

   w = 18 terbagi habis oleh 8 (S)

   u V w = 5 adalah bilangan prima atau 18 terbagi habis oleh 8 (B)

   Sesuai baris ke-2, Tabel 1.4

3. p = Sebuah segitiga mempunyai empat sisi (S)

   q = Sebuah segi empat mempunyai lima diagonal (S)

   p V q = Sebuah segitiga mempunyai empat sisi atau sebuah segi empat mempunyai lima diagonal (S)

   Sesuai baris ke-4, Tabel 1.4

3. Negasi dari Konjungsi dan Disjungsi

Konjungsi dan disjungsi masing-masing merupakan suatu pernyataan. Sehingga negasi dari konjungsi dan disjungsi mempunyai makna yang sama dengan negasi suatu pernyataan, Oleh karena itu, nilai kebenaran dari negasi konjungsi dan disjungsi, harus berpanduan pada aturan nilai kebenaran dari konjungsi dan disjungsi. Untuk menentukan negasi dari konjungsi dua pernyataan perhatikanlah tabel nilai kebenaran (Tabel 1.5) berikut ini.

Tabel 1.5

Nilai Kebenaran Negasi dari Konjungsi

a	b	-a	-b	a Λ b	- (a Λ b)	-a V -b	
B	B	S	S	B	S	S	Baris ke-1
B	S	S	B	S	B	B	Baris ke-2
S	B	B	S	S	B	B	Baris ke-3
S	S	B	B	S	B	B	Baris ke-4
Kolom ke-		1	2	3	4	5	

Pernyataan tabel nilai kebenaran pada Tabel 1.5 dilakukan sebagai berikut. Penentuan nilai kebenaran pada kolom ke-1 (nilai kebenaran dari –a) menggunakan ketentuan negasi suatu pernyataan (a). Apabila a bernilai B maka –a bernilai S dan sebaliknya. Demikian pula untuk nilai kebenaran pada kolom ke-2. Penentuan nilai kebenaran pada kolom ke-3 (nilai kebenaran dari a Λ b) menggunakan aturan nilai kebenaran konjungsi dua pernyataan a dan b, Nilai kebenaran pada kolom ke-4 adalah negasi dari kolom ke-3, sedangkan nilai kebenaran pada kolom ke-5 diturunkan dari kolom ke-1 dan ke-2 dengan menggunakan aturan disjungsi.

Tampak dalam Tabel 1.5 bahwa urutan nilai kebenaran pada kolom ke-4 sama dengan urutan nilai kebenaran pada kolom ke-5. Maka dapat dismpulkan bahwa;

$$\boxed{-(a \wedge b) = -a \vee -b}$$

Negasi dari konjungsi dua pernyataan sama dengan disjungsi dari negasi masing-masing pernyataan tunggalnya.

Contoh 1.5

Tentukanlah negasi dari pernyataan-pernyataan berikut ini

1. Ajid pergi ke toko dan Ajid membeli buku
2. 4 + 5 = 9 dan 9 adalah suatu bilangan prima
3. Enal belajar dan Lia tidak lulus ujian
4. 7 lebih besar dari 5 dan 6 adalah bilangan komposit

Jawab:

1. Ajid *tidak* pergi ke toko atau Ajid *tidak* membeli buku.
2. 4 + 5 ≠ 9 atau 9 *bukan* suatu bilangan prima
3. Enal *tidak* rajin belajar atau Lia *lulus* ujian
4. 7 *tidak* lebih besar dari 5 atau 6 *bukan* bilangan komposit

Selanjutnya, kita akan membicarakan negasi dari disjungsi dua pernyataan. Perhatikan contoh berikut ini.

Misalnya, a = 8 adalah suatu bilangan prima (S)

-a = 8 bukan suatu bilangan prima (B)

b = 20 terbagi habis oleh 4 (B)

-b = 20 tidak terbagi habis oleh 4 (S)

Maka,

a V b bernilai B, maka –(a Λ b) bernilai S

-a V –b bernlai B, maka – (a V b) ≠ -a V –b

-a Λ –b bdrnilai S, dan nilai kebenaran dari – (a V b) sama dengan nilai kebenaran dari –a Λ -b.

Kesimpulan ini secara umum akan kita periksa dengan menyusun tabel nilai kebenarannya (Tabeln1.6) berikut.

Tabel 1.6
Nilai Kebenaran Negasi dari Disjungsi

a	b	-a	-b	a V b	- (a V b)	-a Λ -b
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	B	S	S
S	B	B	S	B	S	S
S	S	B	B	S	B	B

Pernyataan nilai-nilai kebenaran dalam Tabel 1.6 ini mirip, seperti penyusunan Tabel 1.5, dimulai dari kolom –a terus ke kanan hingga kolom –a Λ –b. Tampak pada Tabel 1.6 bahwa urutan nilai-nilai kebenaran dari –(a Λ b) sama dengan urutan nilai-nilai kebenaran dari -a Λ –b. Sehingga dapat disimpulkan sebagai berikut.

$$\boxed{-(a \vee b) = -a \wedge -b}$$

> Negasi dari disjungsi dua pernyataan sama dengan konjungsi dari negasi pernyataan-pernyataan tunggalnya

Contoh 1.6

Tentukan negasi dari disjungsi pernyataan-pernyataan berikut ini dan tentukan pula nilai kebenaran dari negasi tersebut.

1. Yogyakarta terletak di pulau Bali atau 4 + 7 = 11
2. 8 membagi habis 36 atau 8 lebaih besar dari 13
3. 47 adalah suatu bilangan prima atau 7 – 3 = 4
4. Bendera RI berwarna merah putih atau Bandung adalah Ibu Kota RI

Jawab:

1. Yogyakarta tidak terletak di pulau Bali dan 4 + 7 ≠ 11 (S).
2. 8 tidak membagi habis 36 dan 8 tidak lebaih besar dari 13 (B).
3. 47 bukan suatu bilangan prima dan 7 – 3 ≠ 4 (S)
4. Bendera RI tidak berwarna merah putih dan Bandung bukan Ibu Kota RI (S)

B. Implikasi dan Biimplikasi

1. Implikasi

Perhatikan contoh berikut ini " Jika Ajid lulus ujian maka Ajid diajak bertamasya". Kalimat ini merupakan pernyataan majemuk. Pernyataan-pernyataan tunggalnya adalah "Ajid lulus ujian" dan "Ajid diajak bertamasya". Kata penghubungnya adalah "jika . . . maka . . .". Pernyataan majemuk seperti ini disebut implikasi. Apabila pernyataan "Ajid lulus ujian" dilambangkan dengan "a", dan "Ajid diajak bertamasya" dilambangkan dengan "b", serta lambang untuk kata penghubung "jika . . . maka . . ." adalah "$\Rightarrow$", maka pernyataan "jika Ajid lulus ujian maka Ajid diajak bertamasya" dilambangkan dengan "a $\Rightarrow$b" (dibaca "jika a maka b").

Pada implikasi "a $\Rightarrow$ b", pernyataan tunggal "a" disebut *pendahulu* (antecendent) dan pernyataan "b" disebut *pengikut* (consequent).

Nilai kebenaran suatu implikasi tergantung pada nilai kebenaran dari pendahulu dan pengikutnya, yaitu mengikuti aturan sebagai berikut.

Suatu implikasi bernailai S jika dan hanya jika pendahulunya bernilai B dan pengikutnya bernilai S, sedangkan untuk nilai-nilai kebenaran pendahulu dan pengikutnya yang lain, implikasi itu bernilai B.

Apabila pendahulunya diberi lambang "a" dan pengikutnya diberi lambang "b" maka nilai kebenaran implikasi "a $\Rightarrow$ b" dapat dinyatakan dalam tabel nilai kebenaran (Tabel 1.7) seperti berikut ini.

Tabel 1.7
Nilai Kebenaran Implikasi

a	b	a $\Rightarrow$ b	
B	B	B	baris ke-1
B	S	S	baris ke-2
S	B	B	baris ke-3
S	S	B	baris ke-4

Contoh 1.7

1. a = 9 adalah suatu bilangan kuadrat (B).
   b = 6 mempunyai dua faktor prima (B)
   a $\Rightarrow$ b = Jika 9 adalah suatu bilangan kuadrat maka 6 mempunyai dua faktor prima (B)
   Sesuai baris ke-1 Tabel 1.7
2. p = Semarang Ibu Kota provinsi Jawa Tengah (B)

q = Tuti adalah presiden RI (S)

a $\Rightarrow$ b = .Jika Semarang Ibu Kota provinsi Jawa Tengah maka Tuti adalah presiden RI (S)

Sesuai baris ke-2 Tabel 1.7

3. v = Matahari terbit dari Barat (S)

w = Indonesia merdeka pada tahun 1945 (B)

u $\Rightarrow$ w = Jika matahari terbit dari Barat maka Indonesia merdeka pada tahun 1945 (B)

Sesuai baris ke-3 Tabel 1.7

4. m = 5 lebih besar dari 9 (S)

n = 9 adalah suatu bilangan prima (S)

m $\Rightarrow$ n = Jika 5 lebih besar dari 9 maka 9 adalah suatu bilangan prima (B)

Sesuai baris ke-4 Tabel 1.7

Perhatikan lagi Tabel 1.7 di atas!. Pengikut "b" pada baris ke-1 dan baris ke-3 masing-masing bernilai B dan nilai kebenaran dari implikasi "a $\Rightarrow$ b" bernilai B pula meskipun pendahulu "a" bernilai B maupun S. Hal ini dapat disimpulkan sebagai berikut.

Apabila pengikut suatu implikasi bernilai B maka implikasi itu bernilai B tanpa memperhatikan nilai kebenaran dari pendahulunya

Pada baris ke-3 dan baris ke-4 dari Tabel 1.7 menyatakan bahwa pendahulu "a" bernilai S dan implikasi "a $\Rightarrow$ b" bernilai B meskipun pengikut "b" bernilai B maupun S sehingga dapat disimpilkan sebagai berikut.

Apabila pendahulu suatu implikasi bernailai S maka implikasi itu bernilai B, tanpa memperhatikan nilai kebenaran dari pengikutnya

Contoh 1.8

1. "Jika matahari terbit dari Barat maka Ajid lulus ujian".

   Implikasi ini bernilai B, sebab pendahunlunya, yaitu "matahari terbit dari Barat' bernilai S.

   Meskipun pengikutnya, yaitu "Ajid lulus ujian" tidak diketahui nilai kebenarannya.
2. "Jika Lia sembuh dari sakitnya maka seekor gajah mempunyai 4 kaki"

Implikasi ini bernilai B, sebab pengikutnya, yaitu “seekor gajah mempunyai 4 kaki”, bernilai B. Meskipun pendahulunya, yaitu “Lia sembuh dari sakit” tidak diketahui nilai kebenarannya.

a. Negasi Suatu Implikasi

Perhatikan implikasi berikut ini “Jika 7 suatu bilangan prima maka 8 lebih besar dari 5”.

Misalnya, a = 7 adalah bilangan prima (B)

b = 8 lebih besar dari 5 (B)

Maka, implikasi “a $\Rightarrow$ b” bernilai B

-a = 7 bukan bilangan prima (S)

-b = 8 tidak lebih besar dari 5 (S)

Maka, implikasi “-a $\Rightarrow$ - b” bernilai B.

Karena “a $\Rightarrow$ b” dan “-a $\Rightarrow$ -b” masing-masing bernilai B, maka “ - a $\Rightarrow$ -b” *bukan* negasi dari “a $\Rightarrow$ b”. Untuk menentukan negasi dari suatu implikasi perhatikan kebenaran Tabel 1.8 berikut ini!.

Tabel 1.8
Nilai Kebenaran Negasi Implikasi

a	b	-b	a $\Rightarrow$ b	- (a $\Rightarrow$ b)	a Λ - b
B	B	S	B	S	S
B	S	B	S	B	B
S	B	S	B	S	S
S	S	B	S	S	S

Tampak pada Tabel 1.8 bahwa urutan nilai kebenaran dari “- (a $\Rightarrow$ b)” sama dengan urutan nilai kebenaran dari “a Λ - b”. Hal ini dapat disimpulkan bahwa negasi dari suatu implikasi adalah suatu konjungsi dari pendahulu dan negasi pengikut implikasi itu.

$$\boxed{- (a \Rightarrow b) = a \ \Lambda \ -b}$$

Contoh 1.9

Tuliskan negasi dari implikasi berikut ini!

1. Jika Lia tidak pergi ke Jakarta maka Lia ikut kena musibah
2. Jika Ajid belajar giat maka Ajid akan lulus ujian
3. Jika guru rajin mengajar maka muridnya akan pandai

Jawab.

Negasi dari implikasi itu adalah:

1. Lia tidak pergi ke Jakarta dan Lia tidak ikut kena musibah
2. Ajid belajar giat dan Ajid tidak akan lulus ujian
3. Guru rajin mengajar dan muridnya tidak akan pandai

b. Konvers, Invers, dan Kontrapositif dari Suatu Implikasi

Perhatikan contoh implikasi berikut “Jika matahari terbit dari Barat maka Lia lulus ujian”. Pendahulu dari implikasi ini adalah “Matahari terbit dari Barat” dan pengikutnya adalah “Lia lulus ujian”. Kita dapat membentuk implikasi baru dari implikasi tersebut dengan menukarkan pendahulu dengan pengikutnya dan sebaliknya, yaitu “Jika Lia lulus ujian maka matahari terbit dari Barat” Implikasia baru yang dibentuk dengan cara iniu disebut *konvers* dari implikasi semula.

Jadi, jika diketahui implikasi “a $\Rightarrow$ b” maka konversnya adalah “b $\Rightarrow$ a”

Konvers dari “a $\Rightarrow$ b” adalah “b $\Rightarrow$ a”

Contoh 1.10

Tentukan konvers, nilai kebenaran dari implikasi dan konversnya dari implikasi berikut ini!

1. “Jika 7 membagi habis 15 maka 11 adalah suatu bilangan prima”
2. “Jika 5 + 7 = 13 maka Lia naik kelas

Jawab.

1. “Jika 7 membagi habis 15 maka 11 adalah suatu bilangan prima” adalah suatu implikasi yang bernilai B (sesuai baris ke-3 Tabel 1.7. Konvers dari implikasi itu adalah “Jika 11 suatu bilangan prima maka 7 membagi habis 15” bernailai S (sesuai baris ke-2 Tabel 1.7)
2. Implikasi “Jika 5 + 7 = 13 maka Lia naik kelas” bernilai B. sebab pendahulunya “5 + 7 = 13” bernilai S meskipun pengikutnya “Lia naik kelas” tidak diketahui nilai kebenarannya (sesuai baris ke-3 dan ke-4 Tabel 1.7). Konversnya adalah “Jika Lia naik kelas maka 5 + 7 = 13” dan nilai kebenarannya tidak dapat ditentukan. Jika pernyataan “Lia naik kelas” bernilai B maka konvers itu bernilai S. dan jika pernyataan “Lia naik kelas” bernilai S maka konvers itu bernilai B. Oleh karena pernyataan “Lia naik kelas” tidak dapat diketahui nilai kebenarannya maka konvers itu tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya.

Secara implikasi, selain dapat dibentuk konversnya, dapat pula dibentuk implikasi baru lainnya. Perhatikan contoh implikasi berikut ini!

"Jika Mawan dapat mengendarai sepeda maka Mawan mendapat hadiah"

Misalnya, a = Mawan dapat mengendarai sepeda

b = Mawan mendapat hadiah

Negasi dari pernyataan-pernyataan itu adalah:

-a = Mawan tidak dapat mengendarai sepeda

-b = Mawan mendapat hadiah

Implikasi baru yang dibentuk "-a $\Rightarrow$-b", yaitu "Jika Mawan tidak dapat mengendarai sepeda maka Mawan mendapat hadiah". Implikasi baru ini disebut *invers* dari implikasi semula.

Invers dari "a $\Rightarrow$ b" adalah "-a $\Rightarrow$-b"

Contoh 1.11

Tuliskan invers dari implikasi-implikasi berikut ini dan tentukan pada nilai kebenaran dari implikasi dan inversnya!

1. Jika 5 adalah faktor prima dari 30 maka 30 adalah kelipatan dari 5.
2. Jika Denpasar terletak di pulau Jawa maka Surabaya Ibi Kota provinsi Jawa Timur.

Jawab.

1. Nilaia kebenaran dari implikasi itu adalah B

   Inversnya adalah "jika 5 bukan faktor dari 30 maka 30 bukan kelipatan dari 5" bernilai B.
2. Nilai kebenaran dari implikasi ini adalah B

   Inversnya adalah "Jika Denpasar tidak terletak di pulau Jawa maka Surabaya bukan Ibu Kota provinsi Jawa Timur" dan bernilai S

Dari suatu implikasi, selain dapat dibentuk konvers dan inversnya, dapat pula dibentuk implikasi baru yang lain. Yaitu pendahaulu dan pengikutnya dari implikasi yang diketahui masing-masing dinegasikan dan selanjutnya ditukarkan tempatnya. Implikasi baru yang terbentuk ini disebut *kontrapositif* dari implikasi yang diketahui.

Untuk memperjelas hal ini, perhatikan contoh implikasi berikut ini.

"Jika Enal rajin belajar maka Enal naik kelas"

Misalnya, a = Enal rajin belajar (pendahulunya)

b = Enal naik kelas (pengikutnya)

Negasi dari pendahulu dan pengikut ini adalah:

-a = Enal tidak rajin belajar

-b = Enal tidak naik kelas

Implikasi tersebut dapat ditulis dengan lambang “a $\Rightarrow$ b”. Kontrapositif dari implikasi ini adalah “-a $\Rightarrow$-b” adalah “Jika Enal tidak naik kelas maka Enal tidak rajin belajar”

Kontrapositif dari “a $\Rightarrow$ b” adalah “-a $\Rightarrow$-b”

Contoh 1.12

Tentukan nilai kebenaran dari implikasi-implikasi berikut ini!

Tentukan pula kontrapositifnya dan nilai kebenaran dari kontrapositif itu!

1. Jika 6 bilangan prima maka 15 tertbagi habis oleh 6.
2. Jika 7 adalah faktort dari 16 maka 16 kelipatan dari 8
3. Jika Jakarta Ibu Kota RI maka Medan terletak di Irian Jaya
4. Jika matahari terbit dari Barat maka Nisa lulus ujian

Jawab.

1. Implikasi itu bernilai B karena baik pendahulu maupun pengikut, masing-masing bernilai S

   Kontrapositifnya adalah “Jika 15 tidak terbagi habis oleh 6 maka 6 bukan bilangan prima” dan mempunyai nilai kebenaran B
2. Imaplikasi bernilai B karena pendahulunya bernilai S dan pengikutnya bernilai B.

   Kontrapositifnya adalah “Jika 16 bukan kelipatan dari 8 maka 7 bukan faktor dari 16”, dan mempunyai nilai kebenaran B.
3. Implikasi bernilai S karena pendahulu bernilai B dan pengikutnya bernilai S.

   Kontarpositifnya adalah “Jika Medan tidak terletak di Iriaan Jaya maka Jakarta bukan Ibu Kota RI”, dan mempunyai nilai kebenaran S.
4. Implikasi berrnilai B karena pendahulunya bernilai S meskipun nilai kebenaran dari pengikutnya belum diketahui.

   Kontarpositifnya adalah “Jika Enal tidak lulus ujian maka natahari tidak terbit dari Barat”, dan mempunyai nilai kebenaran B.

Dari contoh-contoh ini tampak bahwa nilai kebenaran dari suatu implikasi selalu sama dengan nilai kebenaran dari kontarpositifnya. Untuk meyakinkan kesimpulan ini, kita menyusun tebel nilai klebenarannya (Tabel 1.9)

Tabel 1.9
Nilai Kebenaran Kontrapositif dari Implikasi

a	b	-a	-b	$a \Rightarrow b$	$-b \Rightarrow -a$
B	B	S	S	B	B
B	S	S	B	S	S
S	B	B	S	B	B
S	S	B	B	B	B

Tampak pada Tabel 1.9 ini bahwa nilai kebenaran dari implikasi "$a \Rightarrow b$" sama dengan kontrapositifnya, yaitu "$-b \Rightarrow -a$"

$$\boxed{(a \Rightarrow b) = (-b \Rightarrow -a)}$$

Nilai kebenaran dari suatu implikasi sama dengan nilai kebenaran dari kontarapositifnya

Contoh 1.13

Tentukan konvers, invers, dan kontrapositif dari implikasi berikut ini!

1. $-p \Rightarrow q$
2. $p \Rightarrow -q$
3. $-p \Rightarrow -q$
4. $a \Rightarrow -(a \wedge c)$
5. $-a \Rightarrow -(a \vee c)$

Jawab.

	Konversnya	Inversnya	Kontraposisinya
1	$q \Rightarrow -p$	$q \Rightarrow -p$	$-q \Rightarrow p$
2	$-q \Rightarrow p$	$-p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow -p$
3	$-p \Rightarrow -q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
4	$-(b \wedge c) \Rightarrow a$	$-a \Rightarrow (b \wedge c)$	$(b \wedge c) \Rightarrow -a$
5	$-(b \vee c) \Rightarrow -a$	$a \Rightarrow (b \vee c)$	$(b \vee c) \Rightarrow a$

2. Biimplikasi

Simak implikasi "$a \Rightarrow b$" dan konversnya, yaitu "$b \Rightarrow a$". Dibentuk konjungsi antara implikasi dan konversnya tersebut, yaitu "$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$". Kita akan menentukan nilai kebenaran konjungsi ini jika diketahui nilai-nilai kebenaran dari a dan b dengan menyusun tabel nilai kebenaran (Tabel 1.10)

Tabel 1.10

Nilai Kebenaran dari Konjungsi $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$

a	b	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow a$	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$
B	B	B	B	B
B	S	S	B	S
S	B	B	S	S
S	S	B	B	B

Memperhatikan nilai-nilai kebenaran dari "$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$" dan nilai-nilai kebenaran "a" dan "b": pada Tabel 1.10 kita dapat menyimpulkan bahwa nilai kebenaran dari "$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$" hanya B apabila nilai kebenaran dari a sama dengan nilai kebenaran b, dan bernilai S apabila nilai-nilai kebenaran dari a dan b berbeda.

Selanjutnya konjungsi "$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$" ditulis secara singkat menjadi "$a \Leftrightarrow b$" (bibaca "a jika dan hanya jika b") dan disebut *biimplikasi* dari a dan b.

$$\boxed{(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a) = a \Leftrightarrow b}$$

Oleh karena itu, nilai kebenaran dari "$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$" sama dengan nilai kebenaran dari "$a \Leftrightarrow b$", yaitu berikut ini.

Nilai kebenaran dari "$a \Leftrightarrow b$" adalah B, jika dan hanya jika nilai kebenaran dari a sama dengan nilai kebenaran dari b, dan bernilai S, apabila nilai kebenaran dari a berlainan dengan nilai kebenaran dari b

Tabel 1.11

Nilai Kebenaran Biimplikasi

a	b	$a \Leftrightarrow b$	
B	B	B	baris ke-1
B	S	S	baris ke-2
S	B	S	baris ke-3
S	S	B	baris ke-4

Contoh 1.14

Tentukan nilai kebenaran dari biimplikasi ini!

1. Aulia adalah presiden RI jika dan hanya jika Semarang Ibu Kota RI
2. 7 membagi habis 15 jika dan hanya jika 7 suatu bilangan prima
3. $8 + 7 = 15$ jika dan hanya jika $15 > 2 + 8$

Jawab

1. B. sesuai baris ke-4 Tabel 1.11
2. S. sesuai baris ke-2 Tabel 1.11
3. B. sesuai baris ke-1 Tabel 1.11

Negasi dari Suatu Biimplikasi

Perhatikan contoh biimplikasi berikut ini “7 suatu bilangan prima jika dan hanya jika 7 membagi habis 42”. Biimplikasi ini bernilai B karena dua pernyataan tunggalnya masing-masing bernilai B. Apabila masing-masing pernyataan tunggal tersebut dinegasikan dan dibentuk biimplikasi baru, yaitu “7 bukan suatu bilangan prima jika dan hanya jika 7 tidak membagi habis 42” maka biimplikasi baru ini bernilai B pula. Sehingga dapat disimpulkan bahwa biimplikasi baru ini bukan negasi dari biimplikasi semula

Jika biimplikasi semula dinyatakan sebagai “$a \Leftrightarrow b$” maka “$-(a \Leftrightarrow b)$” bukan “$-a \Leftrightarrow -b$”

Apakah negasi dari “$a \Leftrightarrow b$”?

Biimplikasi “$a \Leftrightarrow b$” adalah singkatan dari “$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$” maka

$$-(a \Leftrightarrow b) = -[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)]$$

$$= -(a \Rightarrow b) \vee (b \Rightarrow a) \qquad \text{(negasi konjungsi)}$$

$$= (a \wedge -b) \vee (b \wedge -a) \qquad \text{(negasi implikasi)}$$

$$\boxed{-(a \Leftrightarrow b) = (a \wedge -b) \vee (b \wedge -a)}$$

Untuk meyakinkan kebenaran dan penjabaran di atas kita periksa dengan tabel nilai kebenaran berikut ini (Tabel 1.12)

Tabel 1.12
Nilai Kebenaran Negasi Biimplikasi

a	b	-a	-b	$a \Leftrightarrow b$	$a \wedge -b$	$b \wedge -a$	$-(a \Leftrightarrow b)$	$(a \wedge -b) \vee (b \wedge -a)$
B	B	S	S	B	S	S	S	S
B	S	S	B	S	B	S	B	B
S	B	B	S	S	S	B	B	B
S	S	B	B	B	S	S	S	S

Tampak pada Tabel 1.12 bahwa urutan nilai kebenaran dari $-(a \Leftrightarrow b)$ sama dengan urutan nilai kebenaran dari $(a \wedge -b) \vee (b \wedge -a)$

Contoh 1.15

Tuliskan negasi dari biimplikasi berikut ini!

1. 7 suatu bilangan prima jika dan hanya jika 7 membagi habis 42
2. Semarang Ibu Kota RI jika dan hanya jika Yogyakarta terletak di provinsi Jawa Tengah
3. Ajid dibelikan sepeda jika dan hanya jika Ajid tidak nakal

Jawab.

Negasi dari biimplikasi ini adalah berikut ini.

1. 7 suatu bilangan prima dan 7 tidak membagi habis 42, atau 7 membagi habis 42 dan 7 bukan suatu bilangan prima
2. Semarang Ibu Kota RI dan Yogyakarta tidak terletak di provinsi Jawa Tengah, atau Yogyakarta terletak di provinsi Jawa Tengah dan Semarang bukan Ibu Kota RI
3. Ajid dibelikan sepeda dan Ajid nakal atau Ajid tidak nakal dan Ajid tidak dibelikan sepeda.

RANGKUMAN

Logika; Proposisi majemuk terdiri dari: negasi (-p), konjungsi ($p \wedge q$, disjungsi ($p \vee q$), negasi rangkap –(-p), kondisional ($p \Rightarrow q$), bikondisional ($p \Leftrightarrow q$, berarti $p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow p$), ekivalen ($p \Leftrightarrow q$, berarti p ekivalen dengan q);

Negasi suatu pernyataan adalah suatu pernyataan yang bernilai salah apabila pernyataan semula bernilai benar, dan bernilai benar apabila pernyataan semula bernilai salah.

Konjungsi dua pernyataan a dan b (ditulis “$a \wedge b$” dibaca “a dan b”) bernilai B (benar) jika dan hanya jika dua pernyataan a dan b masing-masing bernilai B (benar), sedangkan untuk nilai-nilai kebenaran a dan b, “$a \wedge b$” bernilai S (salah).

Disjungsi dua pernyataan a dan b (ditulis “$a \vee b$” dan dibaca “a atau b”) bernilai S jika dan hanya jika dua pernyataan a dan b masing-masing bernjilai S, sedangkan untuk nilai-nilai kebenaran a dan b lainnya “$a \vee b$” bernilai B.

Implikasi “$a \Rightarrow b$” (dibaca “jika a maka b”) pernyataan “a” disebut “pendahulu” dan pernyataan b disebut “pengikut” dari implikasi tersebut. Nilai kebenaran darin suatu implikasi tidak tergantung pada hubungan pendahulu dan pengikiutnya, tetapi hanya tergantung pada nilai-nilai kebenaran dari pendahulu dan pengikutnya. Nilai kebenaran suatu implikasi mengikuti aturan sebagai berikut;

Suatu implikasi bernilai S jika dan hanya jika pendahulunya bernilai B dan pengikutnya bernilai S, sedangkan untuk nilai-nilai kebenaran pendahulu danj pengikutnya yang lain, implikasi itu bernilai B.

Biimplikasi "$a \Leftrightarrow b$" sama artinya dengan "($a \Rightarrow b$" $\wedge$ "$b \Rightarrow a$". Nilai kebenaran dari suatu biimplikasi adalah B apabila dua pernyataan tunggalnya bernilai sama, dan bernilai S apabila nilai dua pernyataan tunggalnya berlainan.

LATIHAN

1. Tulis konvers, invers dan kontrapositif dari proposisi: "Jika Ajid belajar keras, maka ia lulus"
2. Tulis negasi dari proposisi berikut.
   a) semua harimau tidaki jinak   b) untuk beberapa x, 3x = 9.
3. Carilah nilai kebenaran dari setiap premis berikut, bila p benar, q salah daan r salah.
   a) $p \Rightarrow (-q \vee r)$ b) $-q \Rightarrow (p \wedge r)$ c) $(p \vee -q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
4. Diketahui bahwa implikasi "$p \Rightarrow q$" bernilai S. Tentukanlah nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan berikut ini!
   a). $\sim p \Rightarrow q$ b). $p \Rightarrow \sim q$ c). $q \Rightarrow p$ d). $(p \wedge q) \Rightarrow \sim q$

DAFTAR PUSTAKA

Graham, Malcolm., 1975. *Modern Elementary Mathematics*. New York: Harcout Brace Jovanovich, Inc.

Hudojo H., As'ari A.: Yuwono, I,: Supeno, I. 1992. *Pendidikan Matematika II*. Jakarta: Dikti-Depdikbud.

Hudojo H., Sutawidjaja A. 1997. *Matematika*. Jakarta: Dikti-Depdikbud.

Stoll, Robert R. 1976. *Set Theory and Logic*. New Delhi: Eurasin Publishing House (PVT) Ltd.

Sukirman. 2006. *Logika dan Himpunan*. Yogyakarta: FPMIPA IKIP Yogyakarta

Sukirman. 2007. *Matematika*. Jakarta: Universitas Terbuka

Wheeler, R.E. 1992. *Modern Mathematics*, Belmont, CA: Wodsworth.

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN LINEAR

Drs.Zainuddin, M.Pd

Kegiatan belajar mengajar 2 ini akan membahas tentang persamaan dan pertidaksamaan linear. Kegiatan belajar mengajar 2 ini mencakup dua pokok bahasan, yaitu pokok bahasan I tentang persamaan linear, dan pokok bahsan II tentang pertidaksamaan linear. Pada pokok bahasan I akan membahas mengenai penjumlahan dan perkalian, persamaan ekuvalen, persamaan pecahan, dan harga mutlak.

Indikator yang diharapkan diacapai mahasiswa setelah mempelajari kegiatan belajar mengajar 2 ini adalah mahasiwa mampu menyelesaikan;

1. persamaan bilangan bulat satu peubah
2. persamaaan pecahan satu peubah
3. persamaan harga mutlak
4. pertidaksamaan bilangan bulat satu peubah
5. pertidaksamaan pecahan satu peubah
6. pertidaksamaan harga mutlak.

Agar mahasiswa dapat menguasai kegiatan belajar mengajar 2 ini, maka baca dan pelajari secermat mungkin, baik pokok bahasan maupun sub-sub pokok bahasan yang disajikan berikut.

A. Persamaan Linear

Suatu persamaan adalah sebuah pernyataan matematika yang terdiri dari dua ungkapan pada ruas kanan dan ruas kiri yang dipisahkan oleh tanda “=” (dibaca sama dengan)

Hal yang tak diketahui dalam sebuah persamaan disebut *variabel*, sedangkan persamaan yang memuat variabel berpangkat satu disebut *persamaan linear*.

Contoh 2.1

1. $x = 10$
2. $4x + 1 = 15$
3. $3x + 2 = x + 20$

Sebuah penyelesaian dari suatu persamaan berupa bilangan yang jika disubtitusikan pada variabel menghasilkan sebuah pernyataan yang benar.

Definisi 2.1

Sebuah penyelesaian untuk suatu persamaan adalah sebarang bilangan yang membuat persamaan itu benar jika bilangan itu kita subtitusikan pada variabel.

Contoh 2.2

1. 5x = 45 persamaan ini mempunyai penyelesaian bilangan 9, sebab 5(9) = 45 adalah benar. Bilangan -8 bukan sebuah penyelesaian dari 5x = 45 sebab 5(-8) = 45 adalah salah.
2. 3z + 12 = 2z + 7 jika kita selesaikan persamaan ini mempunyai penyelesaian -5 sebab 3(-5) + 12 = 2(-5) + 7

1. Penjumlahan dan Perkalian

Ada dua prinsip yang membolehkan kita untuk menyelesaikan bermacam-macam persamaan.

Pertama, prinsip penjumlahan

Untuk sebarang bilangan a, b, dan c jika a = b maka

A + c = b + c

A – c = b – c

Kedua, prinsip perkalian

Untuk sebarang bilangan real a, b, dan c jika a = b maka a . c = b . c

$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$, benar dengan c ≠ 0

Contoh 2.3

Selesaiaklah 3x + 19 = 31

Penyelesaian.

3x + 19 = 31	
3x + 19 + (-19) = 31 + (-19)	menggunakan prinsi penjumlahan,
3x = 12	kedua rua kita tambah dengan -19
$\left(\frac{1}{3}\right)3x=\left(\frac{1}{3}\right)12$	menggunakan peinsip perkalian,
x = 4	kedua rua kita kalikan dengan $\frac{1}{3}$

Contoh 2.4

Selesaikan 3(y – 1) – 1 = 2 – 5(y – 5)

Penyelesaian,

3(y – 1) – 1 = 2 – 5(y – 5)

3y – 3 – 1 = 2 – 5y + 25 (distribusi)

3y – 4 = -5y + 27

3y – 4 + 4 = -5y + 27 + 4 kedua ruas kita tambah -4

3y = -5y +31

3y + 5y = 31+ 5y + (-5y) \kedua ruas kita tambah +5y

8y = 31

$\left(\frac{1}{8}\right)8y=\frac{1}{8}(31)$ Kedua ruas kita kalikan $\frac{1}{8}$

x = $\underline{\frac{31}{8}}$

2. Persamaan Ekuivalen

Persamaan ekuivalen, adalah persamaan yang mempunyai himpunan penyelesaian yang sama.

Contoh 2.5

4x = 16

-5x = -20

2x + 7 = 15

3x – 5 = x + 3

Keempat persamaan tersebut ekivalen karena himpunan penyelesaiannya sama, yaitu $\left(x|x=4\right)$

3. Persamaan Pecahan

Persamaan yang memuat ungkapan pecahan kita namakan persamaan pecahan. Untuk menyelesaikan persamaan pecahan ini kita gunakan perkalian dengan variabel.

Contoh 2.6

$$\frac{M-2}{5}+\frac{M}{3}=\frac{1}{3}$$

$15\left(\frac{M-2}{5}+\frac{m}{3}\right)=15\left(\frac{1}{5}\right)$ kedua ruas kita kalikan dengan 15

$15\left(\frac{M-2}{5}\right)+15\left(\frac{M}{3}\right)=3$ distribusi perkalian terhadap penjumlahan

3M – 6 + 5M = 3

8M – 6 = 3

8M – 6 + 6 = 3 + 6 kedua ruas kita tambah dengan 6

8M = 9

$\left(\frac{1}{8}\right)8M=\left(\frac{1}{8}\right)9$ kedua ruas kita kalikan dengan $\frac{1}{8}$

M = $\frac{9}{8}$

Contoh 2.7

Selesaikan $\frac{x+4}{x+5}=\frac{-1}{x+5}$

Penyelesaian.

$(x+5)\left(\frac{x+4}{x+5}\right)=(x+5)\left(\frac{-1}{x+5}\right)$ kedua ruas kita kalikan dengan (x + 5)

x + 4 = -1

x + 4 + (-4) = -1 + (-4) kedua ruas kita tambah dengan -4

x = -5

4. Harga Mutlak

Harga mutlak dari sebuah bilangan selalu bernilai positif atau nol.

Harga mutlak dari sebuah bilangan real s, kita tulis

$|x|$, untuk

$$|x|=\begin{cases} x, \ jika\, x\geq 0 \\ -x, \ jika\, x\leq 0 \end{cases}$$

Contoh 2.8

1. $|23|=23$
2. $|-41|=-(-41)=41$
3. $|0|=0$

Contoh 2.9

Selesaikan $|x-2|=3$

Penyelesaian.

$|x-2|=3$

x – 2 = 3 atau x – 2 = -3,

Masing-masing persamaan nerupakan bagian dari penyelesaian.

x – 2 = 3	atau	x – 2 = -3,
x – 2 + 2 = 3 + 2	atau	x – 2 + 2 = -3 + 2,
x = 5 . . . (1)	atau	x = -1 . . . (2)

Persamaan (1) dan (2) semua memenuhi. Jadi, himpunsn penyelesaiannya {-1, 5}

Contoh 2.10

Selesaikan $|5x-7|=7x-5$

Penyelesaian.

5x – 7 = 7x – 5	atau	5x – 7 = -(7x -5)
5x – 7x – 7 = 7x – 7x – 5	atau	5x – 7 = -7x + 5
-2x – 7 + 7 = -5 + 7	atau	5x + 7x – 7x = -7x + 7x + 5
-2x = 2	atau	12x = 12
$\left(\frac{1}{-2}\right)-2x=\left(\frac{1}{-2}\right)2$	atau	$\left(\frac{1}{12}\right)12x=\left(\frac{1}{12}\right)12$
x = -1 . . . .(1)	atau	x = 1 . . . (2)

B. Pertidaksamaan Linear

Suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih peubah dan relasi ≤, <, ≥ atau > disebut suatu pertidaksamaan.

Perhatikan contoh-contoh berikut.

1). x + 7 > 4

2). x – 4 ≤ 7 + 3x

3). x + y < 3

4). $x^2 - 4x + 2 \geq 0$

5). $x^2 + y^2 < 0$

Jika suatu pertidaksamaan hanya mengandung satu peubah dan berpangkat satu maka pertidaksamaan tersebut dinamakan pertidaksamaan linear satu peubah. Selanjutnya jika dikatakan pertidaksamaan, maka yang dimaksud adalah pertidaksamaan linear satu peubah. Contoh 1 dan 2 merupakan suatu pertidaksamaan linear satu peubah, sedang contoh 3, 4, dan 5 bukan.

Bentuk umum pertidaksamaan linear satu peubah adalah $ax + b \leq 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, dan $ax + b > 0$ dengan a, b bilangan real dan $a \neq 0$.

Sebagaimana halnya persamaan, menyelesaikan pertidaksamaan merupakan suatu proses mendapatkan suatu bilangan sehingga pertidaksamaan tersebut menjadi proposisi benar. Bilangan yang diperoleh tersebut merupakan selesaian pertidaksamaan tersebut. Himpunan semua selesaian suatu pertidaksamaan disebut himpunan selesaian.

Cara Penyelesaiannya

Untuk menyelesaikan suatu pertidaksamaan kita menggunakan sifat-sifat antara lain sebagai berikut.

1. Jika a,,b, dan c bilangan real
   a) $a \leq b$, maka $a + c \leq b + c$
   b) $a \geq b$, maka $a + c \geq b + c$
2. a, b, dan c bilangan real
   a) untuk $c > 0$, jika $a > b$ maka $ac > bc$; jika $a < b$ maka $ac < bc$
   b) untuk $c < 0$, jika $a > b$ maka $ac < bc$; jika $a < b$ maka $ac > bc$

Contoh 2.11.

Tentukan himpunan selesaian

a) $3x - 5 > 4$ b) $-2x + 3 < -3$ c) $3x + 2 \geq 5x - 2$

Jawab

a) $3x - 5 > 4$

   $3x - 5 + 5 > 4 + 5$

   $3x > 9$

   $\frac{3x}{3} > \frac{9}{3}$

   $x > 3$ Mengapa tanda > tetap?

   Ini berarti setiap bilangan yang lebih dari 3 memenuhi pertidaksamaan tersebut sehingga himpunan selesaiannya adalah $\{x: x > 3\}$

b) $-2x + 3 < -3$

   $-2x + 3 - 3 < -3 - 3$

   $-2x < -6$

   $\frac{-2x}{-2} > \frac{-6}{-2}$

   $x > 3$ Mengapa tanda < berubah menjadi >?

   Himpunan selesaian $\{x: x > 3\}$.

c) $3x + 2 \geq 5x - 2$

$3x + 2 - 2 \geq 5x - 2 - 2$

$3x \geq 5x - 4$

$3x - 5x \geq 5x - 5x - 4$

$-2x \geq -4$

$\frac{-2x}{-2} \leq \frac{-4}{-2}$ Mengapa tanda $\geq$ berubah menjadi $\leq$?

$x \leq 2$

Himpunan selesaian $\{x: x \leq 2\}$

Contoh 2.12

Untuk membangun sebuah rumah tipe A_1, dan A_2, Amir meminta imbalan berturut-turut Rp. 5.000.000,- dan Rp. 4.000.000,-

Berapa imbalan yang diminta Amir untuk membangun sebuah rumah tipe A_3 agar rata-rata imbalan ketiga tipe yang diperoleh melebihi imbalan membangun sebuah tipe A_1.

Jawab

Misalnya Amir minta imbalan x rupiah

Maka $\frac{5.000.000 + 4.000.000 + x}{3} > 5.000.000$

$\frac{9.000.000 + x}{3} > 5.000.000$

$9.000.000 + x > 3 \times 5.000.000$

$x > 6.000.000$

Jadi imbalan yang diminta Amir adalah lebih dari Rp. 6.000.000,-

RANGKUMAN

Persamaan dan pertidaksamaan linear

Jika semesta pembicaraan tidak dinyatakan secara khusus, maka semesta pembicaraan adalah himpunan bilangan real.

1. Peramaan linear

   Suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih peubah dan relasi “=” disebut persamaan.

   Suatu persamaan yang mengandung satu peubah dan berpangkat satu disebut persamaan linear satu peubah.

2. Pertidaksamaan linear

Suatu kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih peubah dan relasi "$\leq, <, >, atau \geq$" disebut suatu pertidaksamaan. Suatu pertidaksamaan yang mengandung satu peubah dan berpangkat satu, maka pertidaksamaan itu disebut pertidaksamaan linear satu peubah.

LATIHAN

1. Tentukan himpunan selesaian persamaan berikut.

   a). 2x + 3 = 9 c). $\frac{x-3}{2} = \frac{2x+3}{3}$

   b). 3x -1 = 2x + 1 d). $\frac{2x-1}{3} = 5$

2. Tentukan himpunan selesaian pertidaksamaan berikut.

   a). 2x + 3 < 9 c). $\frac{x-3}{2} \leq \frac{2x+3}{3}$

   b). 3x – 1 $\geq$ 2x + 1 d). $\frac{2x-1}{3} > 5$

3. Suatu persegi panjang mempunyai ukuran panjang lebarnya kurang 5 cm dari panjangnya, Bila keliling persegi panjang tersebut 42 cm, berapakah ukuran panjang dan lebar persegi panjang tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Kaufmann, J. E. 1986. *Intermediate Algebra for College Students.* Boston: PWS-Kent.

Keddy, M. L., B Bettingr, M. L. 1986. *Algebra B Trigonometry*. Fourt Edition. Indiana University: Addison – Wesley.

Hudojo H., As'ari A.: Yuwono, I,: Supeno, I. 1992. Pendidikan Matematika II. Jakarta: Dikti-Depdikbud.

Hudojo H., Sutawidjaja A. 1997. Matematika. Jakarta: Dikti-Depdikbud.

Sukirman. 2007. *Matematika*. Jakarta: Universitas Terbuka

Wheeler, R.E. 1992. *Modern Mathematics,* Belmont, CA: Wodsworth.

Willis., A. T., Cs. 1987. *Intermediate Algebra*.,Ca: Wodswort

Zucreman, M.M. 1985. *College Algebra.* New York: John Wiley and Sons.

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN KUADRAT

Drs. Zainuddin, M.Pd

Kegiatan belajar mengajar 3 ini akan membahas tentang persamaan kuadrat. Kegiatan belajar mengajar 3 ini mencakup dua pokok bahasan, yaitu pokok bahasan I tentang persamaan kuadrat, dan pokok bahsan II tentang pertidaksamaan kuadrat. Pada pokok bahasan I akan membahas mengenai cara menentukan akar-akar persamaan kuadrat dengan menfaktorkan, menentukan akar-akar persamaan kuadrat dengan melengkapkan kuadrat, menentukan akar-akar persamaan kuadrat dengan rumus. Sedangkan pada pokok bahasan II akan dibahas tentang sifat-sifat persamaan kuadrat; jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat serta diskriminan persamaan kuadrat.

Indikator yang diharapkan diacapai mahasiswa setelah mempelajari kegiatan belajar mengajar 3 ini adalah mahasiwa mampu menyelesaikan;

1. menganalisi bentuk-bentuk persamaan kuadrat yang ekuivalen;
2. menentukan akar-akar persamaan kuadrat
3. menggunakan sifat-sifat akar persamaan kuadrat
4. menganalisis jenis-jenis akar persamaan kuadrat
5. menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan kuadrat
6. menyelesaikan pertidaksamaann kuadrat
7. menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan pertidaksamaan kuadrat.

Agar mahasiswa dapat menguasai kegiatan belajar mengajar 2 ini, maka baca dan pelajari secermat mungkin, baik pokok bahasan maupun sub-sub pokok bahasan yang disajikan berikut.

A. Persamaan Kuadrat

Anda tentu masih ingat tentang persamaan linear yang telah disajikan sebelumnya. Bentuk umum persamaan kuadrat berbeda dengan bentuk umum persamaan linear. Oleh karena itu, sebelum kita membahas tentang cara-cara untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat kita akan membahas terlebih dahulu bentuk umum persamaan kuadrat..

Bentuk umum persamaan kuarat adalah $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, dan c adalah konstanta real dan $a \neq 0$. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh-contoh bentuk persamaan di bawah ini!

Contoh 3.1

Manakah diantara persamaan-persamaan di bawah ini yang merupakan persamaan kuadrat?

1. $3x + 4 = 0$
2. $x^2 + 6x + 8 = 0$
3. $x^2 – 7x + 10 = 0$
4. $3x^2 – 3x – 5 = 0$
5. $x^2 – 9 = 0$
6. $x^2 – 3x = 0$
7. $x^3 + 2x$ n$+ 4 = 0$
8. $x^2 + 5x + 8 = 4$

Jawab.

1. $3x + 4 = 0$, bukan merupakan kuadrat karena pangkat tertinggi bagi peubah x dari persamaan tersebut bukan 2, melainkan 1 (lihat 3x). Bentuk persamaan seperti ini biasa disebut persamaan linear
2. $x^2 + 6x + 8 = 0$ merupakan persamaan kuadrat karena pangkat tertiggi bagi peubah x dari persamaan tersebut adalah 2 (lihat x^2). Bentuk persamaan kuadrat seperti ini sering disebut persamaan kuadrat biasa
3. $x^2 – 7x + 10 = 0$, merupakan persamaan kuadrat karena pangkat tertinggi bagi peubah x dari persamaan tersebut 2 walaupun konstanta b bernilai negatif (-7). Bentuk persamaan kuadrat seperti ini sering disebut persamaan kuadrat biasa
4. $3x^2 – 3x – 5 = 0$, merupakan persamaan kuadrat karena pangkat tertinggi bagi peubah x dari persamaan tersebut 2 walaupun konstanta b dan konstanta c keduanya bernilai negatif. Bentuk persamaan kuadrat seperti ini sering disebut persamaan kuadrat biasa
5. $x^2 – 9 = 0$, merupakan persamaan kuadrat karena pangkat tertinggi bagi peubah x dari persamaan tersebut 2 walaupun konstanta b bernilai nol. Bentuk persamaan kuadrat seperti ini sering disebut persamaan kuadrat sempurna
6. $x^2 – 3x = 0$, merupakan persamaan kuadrat karena pangkat tertinggi bagi peubah x dari persamaan tersebut 2 walaupun konstanta c bernilai nol. Bentuk persamaan kuadrat seperti ini sering disebut persamaan kuadrat tak lengkap

7. $x^3 + 2x + 4 = 0$, bukan merupakan persamaan kuadrat karena pangkat tertinggi bagi peubah x dari persamaan tersebut 3.
8. $x^2 + 5x + 8 = 4$, juga merupkan persamaan kuadrat biasa, sebab pangkat tertinggi bagi peubah x dari persamaan tersebut adalah 2 dan bentuknya dapat diubah menjadi $x^2 + 5x + 4 = 0$

Perbedaan antara persamaan kuadrat biasa dan persamaan kuadrat sempurna adalah pada akar-akar persamaan kuadrat tersebut. Akar-akar persamaan kuadrat sempurna adalah konstanta-konstanta yang berbeda (tidak sama satu sama lain). Untuk persamaan kuadrat tidak sempurna adalah persamaan kuadrat yang tidak memiliki konstanta c (c = 0).

Penjelasan mengenai cara-cara pencarian akar-akar dari persamaan kuadrat tersebut akan disajikan pada pembahasan selanjutnya.

1. Akar-akar Persamaan Kuadrat

Persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ dapat diselesaikan dengan cara menentukan nilai peganrti x yang memenuhi persamaan tersebut. Nilai peganti tersebut mengubah kalimat terbuka (persamaan kuadrat) menjadi sebuah pernyataan yang bernilai benar. Penyelesaian dari persamaan kuadrat disebut akart-akar persamaan kuadrat. Beberapa cara untuk menyelesaikan (menemukan akar-akar) dari persamaan kuadrat diantaranya dengan cara berikut.

1. Memfaktorkan
2. Melengkapkan kuadrat sempurna
3. Menggunakan rumus akar-akar kuadrat

Dalam kegiatan ini Anda akan mempelajari ketiga cara untuk menentukan akar-akar suatu persamaan kuadrat.

1). Menentukan Akar-akar Persamaan Kuadrat dengan Memfaktorkan

Jika $ax^2 + bx + c = 0$ dapat difaktorkan, maka akar-akar persamaan kuadrat dapat ditentukan dengan menggunakan sifat;

Jika p, q $\in R$ dan berlaku pq = 0, maka p = 0, atau q = 0

Contoh 3.2

Carilah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 5x + 6 = 0$,

Jawab.

x^2 -5x + 6 = 0,

$\Leftrightarrow$ (x – 2)(x – 3) = 0

$\Leftrightarrow$ x – 2 = 0 atau x – 3 = 0

$\Leftrightarrow$ x = 2 atau x = 3

Contoh 3.3

Sebuah gambar yang berukuran 20 cm x 24 cm dikelilingi bingkai yang luasnya 416 cm^2. Tentukan lebar bingkai tersebut.

Jawab.

Misalkan, lebar bingkai x cm, sehingga dapat diperoleh persamaan kuadrat (20 + 2x)(24 + 2x) = (20 x 24) + 416

$\Leftrightarrow 4x^2 + 88x + 480 = 480 + 416$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 88x + 480 – 480 – 416 = 0$

$\Leftrightarrow$ $4x^2$ + 88x – 416 b= 0

$\Leftrightarrow x^2 + 22x – 104 = 0$

$\Leftrightarrow$ (x + 26)(x – 4) = 0

$\Leftrightarrow$ x + 26 = 0 atau x – 4 = 0

$\Leftrightarrow$ x = -26 atau x = 4

Jadi, lebar bingkai adalah 4 cm. Mengapa x = -26 tidak mungkin menjadi ukuran lebar bingkai?

2). Menentukan Akar-akar Persamaan Kuadrat dengan Melengkapkan Kuadrat

Selain dengan cara penfaktoran, persamaan kuadrat dapat diselesaikan dengan melengkapi bentuk kuadrat. Pada hakikatnya tiap bentuk kuadrat dapat dimanipulasi secara aljabar menjadi kuadrat sempurna. Coba Anda pahami contoh 2.1 di berikut ini yang menjelaskan cara penentuan akar-akar persamaan kuadrat dengan melengkapkan kuadrat.

Contoh 3.4

Dengan melengkapkan kuadrat sempurna, tentukan akar-akar persamaan kuadrat dengan melengkapkan kuadrat $x^2 – 6x + 5 = 0$

Jawab.

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x = -5$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - 9 = -5$

$\Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9) = -5 + 9$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 = 4$

$\Leftrightarrow (x - 3) = \pm\sqrt{4}$

$\Leftrightarrow x - 3 = 2$ atau $x - 3 = -2$

$\Leftrightarrow x = 5$ atau $x = 1$

3). Menentukan Akar-akar Persamaan Kuadrat dengan Rumus

Metode paling umum untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dapat dicari dengan menggunakan rumus sebagai berikut.

$ax^2 + bx + c = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b^2}{4a^2}x = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b_2}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b \ \ -4ac}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad atau \ x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Catatan:

1. x_1, x_2 disebut akar-akar perasamaan kuadrat, yang sering ditulis dalam bentuk;

   $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

2. {x_1, x_2) disebut himpunan peyelesaian dari persamaan kuadrat
3. $b^2 - 4ac$ disebut diskriminan, dan dinyatakan dengan $D = b^2 - 4ac$

Contoh 3.5

Dengan menggunakan rumus kuadrat, tentukan akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 6x + 5 = 0$

Jawab.

Koefisien-koefisien dari persamaan kuadrat $x^2 - 6x + 5 = 0$ adalah a = 1, b = -6, dan c = 5 sehingga jika koefisien-koefisien tersebut disubtitusi kedalam rumus kuadrat menjadi,

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 4}{2}$$

Jadi, $x_1 = \frac{6+4}{2} = 5$ atau $x_2 = \frac{6-4}{2} = 1$

2. Sifat-sifat Persamaan Kuadrat

1). Jumlah dan Hasil Kali Akar-akar Persamaan Kuadrat

Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan a ≠ , jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat itu ditentukan dengan rumus;

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad dan \quad x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

Bukti:

Akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah;

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad atau \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Maka jumlah akar-akar persamaan kuadrat itu adalah;

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat itu adalah;

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b)-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{(2a)^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Contoh 3.6

Jika x_1, x_2 akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 2x + 4 = 0$, tentukan, $x_1 + x_2$, $x_1 . x_1$, dan $x_1^2 + x_2^2$

Jawab:

a) Koefisien-koefisien dari persamaan kuadrat $x^2 - 2x + 4 = 0$ adalah a = 1, b = -2, dan c = 4 sehingga jika koefisien-koefisien tersebut disubtitusi ke dalam rumus jumlah akar-akar menjadi;

$$x_1 + x_2 = -\frac{(-2)}{1} = 2$$

b) Demikian pula jika koefisien-koefisien tersebut disubtitusi kedalam rumus hasil kali akar-akar kuadrat menjadi;

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{4}{1} = 4$$

c) Untuk menyelesaaikan bentuk $x_1^2 + x_2^2$ perlu diubah menjadi bentuk penjumlahan dan hasil kali aka-akar kuadrat sebagai berikut.

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

Dengan bentuk ini dapat kita peroleh hasil

$$x_1^2 + x_2^2 = (2)^2 - 2(4)$$

$$= 4 - 8 = -4$$

2. Diskriminan Persamaan Kuadrat

Dengan melihat nilai diskriminan dari suatu persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a \neq 0$ dan $D = b^2 - 4ac$, dapat diketahui jenis-jenis akar persamaan kuadrat sebagaiu berikut;

Jika $D > 0$, kedua akarnya bilangan real (nyata) yang berbeda

Jika $D = 0$, kedua akarnya bilangan real (nyata) dan sama

Jika $D < 0$, kedua akarnya bilangan kompleks

Contoh 3.7

Tentukan nilai p pada persamaan kuadrat px^2 $(p + 8)x + 9 = 0$ sehingga persamaan tersebut mempunyai akar-akarnya bilangan real dan sama?

Jawab:

Koefisien-koefisien dari persamaan kuadrat px^2 $(p + 8)x + 9 = 0$ adalah $a = p$, $b = p + 8$, dan $c = 9$. Jika koefisien-koefisien tersebut disubtitusikan kedalam rumus diskriminan akan diperoleh;

$D = b^2 - 4ac$

$= (p + 8)^2 - 4(p)(9)$

Persyaratan agar mempunyai akar-akarnya bilangan real dan sama adalah $D = 0$.

$\Leftrightarrow (p + 8)^2 - 36p = 0$

$\Leftrightarrow p^2 + 16p + 64 - 36p = 0$

$\Leftrightarrow p^2 - 20p + 64 = 0$

$\Leftrightarrow (p – 4)(p – 16) = 0$

$\Leftrightarrow p – 4 = 0$ atau $p – 16 = 0$

$\Leftrightarrow p = 4$ atau $p = 16$

B. Pertidaksamaan Kuadrat

Bentuk umum pertidaksamaan kuadrat adalah $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$; dan $ax^2 + bx + c > 0$; dengan a, b, dan c bilangan real; $a \neq 0$.

Cara penyelesaian pertidaksamaan kuadrat, pertama kali kita tentukan himpunan penyelesaian persamaan kuadratnya, yaitu $ax^2 + bx + c = 0$; Dari pengalaman sebelumnya $D = b^2 – 4ac$ menentukan keanggotaan himpunan penyelesaiannya, yaitu bila $D > 0$ maka terdapat 2 anggota, bila $D = 0$ terdapat satu anggota, dan bila $D < 0$ himpunan selesaiannya { }. Selanjutnya perhatikan bagaimana cara penyelesaian pertidaksamaan $x^2 – 7x + 6 > 0$. Dengan cara faktorisasi atau dengan rumus diperoleh himpunan selesaian persamaan $x^2 – 7x + 6 = 0$ adalah {1, 6}.
Kemudian persamaan $x^2 – 7x + 6 = 0$. dapat diubah menjadi $(x -1) (x – 6) = 0$. Mengapa?
Dengan demikian pertidaksamaan $x^2 – 7x + 6 > 0$.menjadi $(x – 1) (x – 6) > 0$.

Contoh 3.8
Tentukan himpunan selesaian $x^2 – 7x + 6 < 0$

Jawab
$x^2 – 7x + 6 < 0$
$(x – 1)(x – 6) < 0$

1) pilih sembarang $x < 1$, misalnya $x = 0$, maka $(0 – 1) (0 -6) = 6 > 0$. Ini berarti untukm semua $x < 1$, $(x – 1)(x – 6) > 0$.
2) pilih sembarang x untuk $1 < x < 6$, misalnya $x = 2$, maka $(2 – 1)(2 - 6) = -4$m< 0. Ini berarti untuk semua x yang terletak di $1 < x < 6$, maka $(x – 1)(x – 6) < 0$.
3) pilih sembarang x untuk $x > 0$, misalnya $x = 8$, maka $(8 -1)(8 – 6) = 14 > 0$. Ini berarti untuk semua $x > 6$, , $(x – 1)(x – 6) > 0$.

Dari 1), 2), dan 3) agar , $(x – 1)(x – 6) < 0$, haruslah x berada di $1 < x < 6$.

Contoh 3.9

Sebidang tanah berbentuk persegi panjang mempunyai panjang 10 m lebih dari lebarnya. Bila dikehendaki sebidang tanah tersebut minimum luasnya 200 m^2 berapa panjang dan lebar tanah tersebut?

Jawab

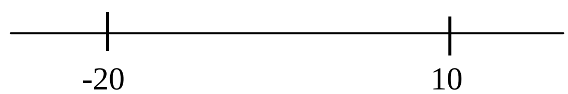
Misalnya lebar tanah tersebut x m sehingga panjangnya (x + 10) m.

Luas tanah x – (x + 10) m^2 minimum 200 m^2. Modelo matematikanya berupa pertidaksamaan yaitu,

$$x(x + 10) \geq 200$$

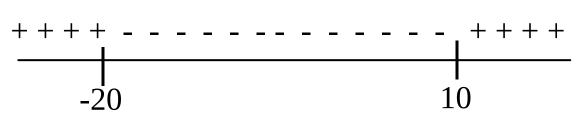
$$x^2 + 10x - 200 \geq 0$$

$$(x + 20)(x – 10) \geq 0$$



1) pilih x = -30, maka -30(-30 + 10) = -30 (-20) = 600 > 0, sehingga untuk semua x < -20 maka (x + 20)(x – 10) >0
2) pilih x = 5, maka (5 + 20)(5 – 10) = 25(-5) = -125 < 0, sehingga untuk -20 < x < 10 maka (x + 20)(x – 10) < 0
3) pilih x = 11, maka (11 + 20)(11 -10) = 31 > 0, sehingga untuk x > 10 maka (x + 20)(x – 10) > 0.

Darin 1), 2), dan 3) diperoleh hasil yang jika digambarkan bilangannya adalah sebagai berikut.



Himpunan selesaian $x(x + 10) \geq 200$ adalah {x: $x \leq -20$ atau $x \geq 10$}. Karena x lebar tanah, maka x > 0, sehingga himpunan selesainnya (x: x ≥1 0}.

Jadi lebar persegi panjang paling sedikit 10 m dan panjangnya paling sedikit 20 m.

RANGKUMAN

1. Persamaan kuadrat adalah suatu persamaan yang mengandung satu peubah dan berpangkat dua di sebut persamaan kuadrat. Bentuk umum persamaan kuadrat adalah $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.
2. Beberapa cara untuk menentukan akar-akar persamaan kuadrat diantaranya dengan cara berikut.
   a. Memfaktorkan
   b. Melengkapkan kuadrat sempurna
   c. Menggunakan rumus akar-akar kuadrat;

   $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, dimana x_1, x_2 disebut akar-akar persamaan kuadrat.
3. Jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat adalah;

   $x_1 + x_2 = (-\dfrac{b}{a})$ dan $x_1 \bullet x_2 = \dfrac{c}{a}$

4. Bentuk umum pertidaksamaan kuadrat adalah;
   1) $ax^2 + bx + c \geq 0$ atau
   2) $ax^2 + bx + c \leq 0$ atau
   3) $ax^2 + bx + c > 0$ atau
   4) $ax^2 + bx + c < 0$, dengan a, b, c konstanta real dan $a \neq 0$

LATIHAN

1. Tentukan himpunanj selesaian persamaan kuadrat berikut.
   a). $x^2 - 10x + 25 = 0$ b). $2x^2 - 3x + 4 = 0$
2. Bila x_1 dan x_2 merupakan selesaian persamaan kuadrat dan $x_1 = 3x_2$ dan $x_1 \cdot x_2 = 3$, carilah persamaann kuadrat tersebut!
3. Tentukan himpunan selesaian pertidaksamaan kuadrat berikut.
   a). $x^2 - 10x + 25 \geq 0$ b). $2x^2 - 3x + 4 \leq 0$

DAFTAR PUSTAKA

Bunarso, T. 1977. *Matematika Jilid 9*. Bandung: Balai Pendidikan Guru Tertulis

Hudojo H., As'ari A.: Yuwono, I,: Supeno, I. 1992. *Pendidikan Matematika II*. Jakarta: Dikti-Depdikbud.

Hudojo H., Sutawidjaja A. 1997. Matematika. Jakarta: Dikti-Depdikbud.

Kodir, A. K. 1979. *Pengantar Matematika SMA Jilid 1*. Jakarta: Depdikbud.

Mulyana, T. 2006. *Matematika 1A SMA dann MA Kelas X*. Bandung: Remaja Rodakarya.

Sukirman. 2007. *Matematika*. Jakarta: Universitas Terbuka

Wheeler, R.E. 1992. Modern Mathematics, Belmont, CA: Wodsworth.

Kegiatan Belajar Mengajar 4

HIMPUNAN, RELASI DAN FUNGSI

Zainuddin

Akina

Kegiatan belajar mengajar 4 ini akan membahas tentang himpunan, relasi, dan fungsi.. Kegiatan belajar mengajar 4 ini mencakup 3 pokok bahasan, yaitu pokok bahasan I tentang himpunan, pokok bahsan II tentang relasi, dan pokok bahasan III tentang fungsi. Pokok bahasan I akan membahas mengenai konsep himpunan, notasi himpunan, dan operasi-operasi pada himpunan. Pokok bahasan II membahas tentang diagram panah, dan pasangan terurut. Sedangkan pokok bahasan III membahas tentang fungsi kedalam (into), fungsi kepada (onto), fungsi satu-satu, fungsi konstan, dan fungsi identitas.

Indikator yang diharapkan diacapai mahasiswa setelah mempelajari kegiatan belajar mengajar 4 ini adalah mahasiwa mampu;

1. memahami perkalian dua himpunan
2. menyelesaikan persoalan matematika yang berkaitan dengan perkaalian himpunan
3. memahami konsep relasi
4. menyelesaikan persoalan relasi
5. memahami konsep fungsi
6. menyelesaiak persoalan fungsi
7. menentukan bentuk relasi dari dua himpunan yang berhubungan
8. menentukan bentuk fungsi dari dua fungsi.

Agar mahasiswa dapat menguasai kegiatan belajar mengajar 2 ini, maka baca dan pelajari secermat mungkin, baik pokok bahasan maupun sub-sub pokok bahasan yang disajikan berikut.

A. Himpunan

1. Konsep Himpunan

Himpunan yang dimaksudkan pada pembahasan ini adalah himpunan sebagai suatu kumpulan dan objek-objek yang didefinisikan dengan jelas. Objek-objek dari himpunan yang dimaksud adalah suatu objek yang dapat ditemukan dengan pasti termasuk dalam himpunan tersebut atau tidak termasuk dalam himpunan tersebut. Objek yang termasuk dalam himpunan itu disebut anggota (element) dari himpunan itu. Sebagai contoh, himpunan wanita cantik.

Himpunan ini objeknya tidak terdefinisi dengan jelas, karna kreteria cantik tidak jelas tetapi himpunan wanita yang perna menjadi presiden Republik Indonesia, merupakan himpunan yang objeknya terdefinisi dengan jelas. Karena kita dapat memilah wanita mana yang menjadi presiden Republik Indonesia dan wanita mana yang tidak pernah menjadi presiden Republik Indonesia. Kata-kata lain, seperti *gugus, kumpulan, kelas, koleksi, keluarga* merupakan sinonim dari kata "himpunan".

Pada umumnya himpunan disimbolkan dengan huruf kapital, seperti A, B, C, dan elemen-elemen dari himpunan disimbolkan dengan huruf alfabet kecil seperti a, b, c, notasinya "$a \in A$" dibaca "a ialah elemen/anggota dari A". dan "$d \notin B$" dibaca "d bukan anggota/elemen dari B".

Himpunan mungkin saja beranggotakan himpunan-himpunan. Himpunan seperti ini biasa juga disebut keluarga atau koleksi dari himpunan-himpunan. Misalnya, himpunan dari tim-tim sepak bola di Indonesia merupakan himpunan yang anggota-anggotanya adalah tim-tim kesebelasan sepak bola yang ada di Indonesia. Tentu saja seorang pemain dari suatu tim kesebelasan bukan menjadi anggota dari keluarga/koleksi tersebut.

Berikut ini contoh-contoh himpunan dan beberapa anggotanya.

Contoh 4.1.

1. Jika G adalah himpunan huruf hidup dalam abjad latin, maka $a \in G$, $e \in G$, $u \in G$, $o \in G$, dan $i \in G$, tetapi $b \notin G$, $d \notin G$, $m \notin G$.
2. Jika C adalah himpunan nama bulan pada kalender masehi yang diawali dengan huruf J, maka januari $\in C$, Juni $\in C$, Juli $\in C$, tetapi. Mei $\notin C$, Agustus $\notin C$, Nopember $\notin C$.
3. Misalkan A adalah semua himpunan bilangan Asli, maka $5 \in A$, $12 \in A$, $3479 \in A$, tetapi $0 \notin A$, $-8 \notin A$, $2/5 \notin A$.
4. Misalkan P adalah himpunan semua bilangan prima, maka $2 \in P$, $7 \in P$, $17 \in P$, tetapi $4 \notin P$, $8 \notin P$, $24 \notin P$.
5. Misalkan Q himpunan semua bilangan rasional positif, maka $7/3 \in Q$, $157 \in Q$, $5/19 \in Q$, tetapi $0 \notin Q$, $-9 \notin Q$, $-9/25 \notin Q$.

2. Notasi Himpunan

Suatu himpunan dapat dinyatakn dengan dua cara:

1. dengan cara daftar(tabulasi)
2. dengan notasi pembentuk himpunan

Cara daftar (tabulasi) adalah menyatakan himpunan dengan cara mendaftar/menuliskan anggota-anggota himpunan tersebut diantara kurung kuruwal buka ({) dan kurung kurawal tutup (}) dan setiap dua anggota dipisahkan dengan tanda koma(,).

Contoh 4.2

1. P = {2,3,5,7} adalah empat bilangan prima pertama, atau himpunan bilangan prima satu angka. Dalam mendaftar anggota-anggotanya, *urutan anggotanya tidak perlu diperhatikan*, sehingga himpunan tersebut dapat pula dinyatakan sebagai {3, 5, 7, 2 }; {7, 3, 5, 2}; {5, 2, 7,3}; {5, 7, 3, 2 } dan sebagainya.
2. Dalam matematika suatu himpunan mungkin hanya mempunyai satu anggota dan biasanya disebut *singleton*, misalnya: D = {April}, yaitu himpunan semua nama bulan yang diawali dengan huruf A. E = {10} ialah himpunan yang anggotanya hanya satu bilangan, yaitu 10.
3. Bahkan dalam matematika mungkin terdapat himpunan kosong dan diberi simbol { } atau Ǿ. Misalnya, himpunan bilangan asli yang kuadratnya sama dengan 5, himpunan lembu yang berkaki seribu, himpunan bilangan asli yang kurang dari 1, dan sebagainya. Ingat bahwa {0} dan { Ø} masing-masing bukan himpunan kosong, tetapi himpunan-himpunan itu masin-masing mempunyai satu anggota.
4. Apabila suatu himpunan mempunyai banyak anggota, maka kita dapat menuliskan tiga atau empat anggota dan diikuti dengan tiga titik. Tiga atau empat anggota yang dituliskan tersebut harus dapat memberi petunjuk untuk menentukan anggota-anggota berikutnya. Misalnya, C = {0, 1, 2, 3, . . .} adalah himpunan semua bilangan cacah. A = {1, 2, 3, 4, . . .} adalah himpunan semua bilangan asli. Tetapi, jika kita hanya menuliskan {1, 2, 3, . . .}, maka himpunan ini mempunyai dua kemungkinan, yaitu {1, 2, 3, 4, 5, . . .} atau {1, 2, 3, 5, 8, 13, . . .}. Penulisan seperti itu harus kita hindari, agar tidak membingungkan. B = {. . . , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, . . .} adalah himpunan semua bilangan bulat.

Cara kedua, menyatakan himpunan dengan *notasi pembentuk himpunan*, yaitu dengan menuliskan satu huruf sembarang sebagai peubah anggota dan syarat keanggotaannya serta tanda garis di antara peubah dan syarat keanggotaan, yang semua tulisan itu berada di antara kurung kurawal buka dan kurung kurawal tutup. Syarat keanggotaan ini harus terdefinisi dengan jelas, artinya sesuatu objek harus dapat ditentukan dengan pasti, sebagai anggota himpunan itu atau tidak. Di SLTP dan SMU/SMK, cara kedua ini dapat pula hanya dituliskan syarat keanggotaannya di antara kurung kurawal buka dan kurung kurawal tutup.

Contoh 4.3

1) $A = \{x \mid x \in$ bilangan asli$\}$ dibaca “himpunan semua x sedemikian hingga x adalah anggota bilangan asli. Tanda “$\mid$” dibaca ‘sedemikian hingga”. Atau dapat dituliskan sebagai A = {bilangan asli}.

   $D = \{x \mid x < 10\}$, $x \in$ bilangan asli} atau

   D = {bilangan asli kurang dari 10}. Apabila diketahui bahwa A adalah himpunan semua bilangan asli, maka himpunan D tersebut dapat dituliskan lebih singkat menjadi $D = \{x \mid x < 10, x \in A\}$

2) Apabila B adalah himpunan semua bilangan bulat, maka G, yaitu himpunan semua bilangan bulat yang ganjil, dapat ditulis sebagai;

   $G = \{x \mid x = 2n + 1, n \in B\}$ atau lebih singkat menjadi

   $G = \{2n + 1 \mid n \in B$. Atau dapat juga dituliskan sebagai

   $G = \{2n + 1 \mid$ n bilangan bulat}.

3) L adalah himpunan semua bilangan bulat kelipatan 5, dapat ditulis sebagai $L = \{5m \mid$ m bilangan bulat}. Atau $L = \{5n \mid n \in B\}$. Jika $B = \{x \mid$ x bilangan bulat}

4) Pada bidang koordinat *Cartesius*, misalnya X adalah himpunan semua titik pada sumbu x, maka $X = \{(x, y) \mid y = 0;\ x, y \in R\}$dengan $R = \{x \mid$ x himpunan bilangan real}, T adalah himpunan semua titik pada garis dengan persamaan $y = 2x + 4$ ditulis sebagai $T = \{(x, y) \mid y = 2x + 4, x \in R\}$.

3. Hubungan Dua Himpunan

Tiap dua himpunan mempunyai hubungan, diantara;

1. himpunan yang satu merupakan himpunan bagian yang lain
2. dua himpunan saling asing (saling lepas)
3. dua himpunan berpotongan atau
4. dua himpunan ekuivalen

Berikut ini akan dibahas tiap-tiap hubungan dua himpunan tersebut.

a. Himpunan Bagian (Subset)

Perhatikan contoh berikut ini. Misalkan $A = \{1, 5\}$ dan $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Perhatikan bahwa 1 dan 5 masing-masing merupakan anggota dari himpunan A dan juga merupakan anggota dari himpunan B. Dapat dikatakan bahwa setiap anggota himpunan A merupakan anggota himpunan B pula. Hal seperti ini dikatakan bahwa himpunan A merupakan himpunan bagian dari himpunan B. Pengertian himpunan bagian ini secara formal didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 4.1 Himpunan A adalah himpunan bagian dari himpunan B (ditulis $A \subset B$}, jika setiap anggota A merupakan anggota B. Aatau dapat ditulis sebagai; $A \in B$ jhj $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$

Contoh 4.4

1) Misalkan D = {a, e, i, u, o}, yaitu himpunan semua vocal dalam abjad Latin dan E = {a, b, c, d, . . ., z}, yaitu himpunan semua abjad Latin, maka $D \subset E$. Dan jika F adalah himpunan semua kosonan dalam abjad Latin, maka $F \subset E$ pula.
2) Apabila A = {x ┃ x bilangan asli} dan P = {2, 3, 5, 7, . . .}, yaitu himpunan semua bilangan prima, maka $P \subset A$. Dan jika B = { x ┃ x bilangan bulat}, maka $A \subset B$ dan $P \subset B$.
3) Jika X = {t ┃ t segiempat} dan Y = {r ┃ r jajargenjang}, maka $Y \subset X$. Dan apabila Z = {z ┃ z belah ketupat}, maka $Z \subset Y$ dan $Z \subset X$.
4) Benarkah bahwa $A \subset A$, untuk setiap himpunan A? Memperhatikan Definisi 4.1 maka setiap anggota dari himpunan A mesti merupakan anggota dari himpunan A. Sehingga pastilah benar bahwa $A \subset A$. Selanjutnya dikatakan bahwa A adalah himpunan bagian tak sejati (improper subset) dari A
5) Benarkah bahwa $Ø \subset A$, untuk setiap himpunan A? Menurut Definisi 4.1 $Ø \subset A$ jika dan hanya jika $\forall$ x, x $\in$ Ø $\Rightarrow$ x $\in$ A. Karena x $\in$ Ø adalah suatu pernyataan yang bernilai salah, sebab Ø adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota satupun, Maka kalimat implikasi $x \in Ø \Rightarrow x \in A$ bernilai benar, sebab pendahulu/antesendennya bermnilai salah. Sehingga kalimat "$\forall$ x, $x \in Ø \Rightarrow x \in A$" bernilai benar, dengan denikian $Ø \subset A$ benar. Seperti juga pada contoh 4.4 Ø merupakan himpunan bagian tak sejati dari A pula. Himpunan bagian dari A, selain Ø dan A (jika ada) disebut himpunan bagian sejati (proper subset) dari A. Selanjutnya dalam kegiatan belajar ini, jika tidak ada keterangan apa-apa, maka yang dimaksud kata-kata "himpunan bagian" adalah mencakup himpunan bagian sejati maupun himpunan bagian tak sejati.
6) Semua himpunan bagian dari {a, b, c} adalah { }, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, adan {a, b, c}. Jadi banyaknya himpunan bagian dari {a, b, c} adalah 8. Berapakah banyaknya himpunan bagian dari {a, b, c, d}?

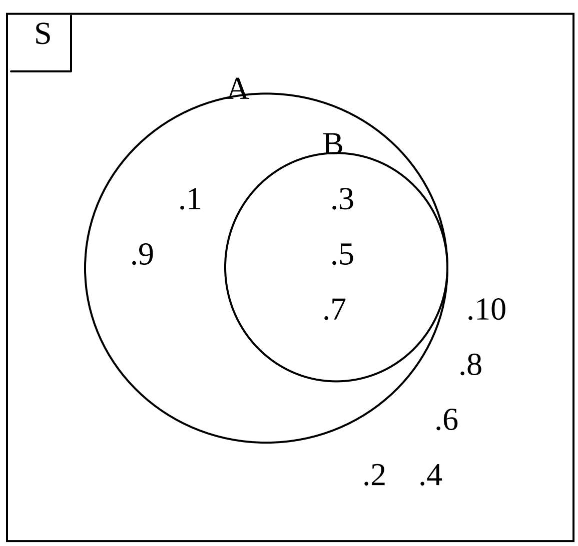
$A \subset B$ dapat pula dibaca "A termuat dalam B" yang sama artinya dengan "B memuat A" yang diberi simbol dengan "$B \supset A$" (B is a subset of A). Apabila A bukan himpunan bagian dari B, atau A tidak termuat dalam B, disimbolkan dengan $A \not\subset B$.

Dalam suatu pembahasan kadang-kadang kita harus membatasi diri, agar pembahasan kita terfokus pada permasalahan yang dibahas. Dalam pembahasan himpunan, kita perlu menetapkan suatu himpunan yang anggota-anggota atau himpunan bagian-himpunan bagiannya merupakan sumber pembahasan. Himpunan seperti ini disebut *Himpunan Semesta* atau *Semesta Pembicaraan* (Universal Set), yang bisa diberi lambang dengan huruf S atau U. Himpunan semesta yang dfitetapkan tergantung pada permasalahan yang sedang dibahas. Misalnya, dalam suatu keadaan mungkin himpunan semua bilangan rasiaonal sebagai himpunan semesta, dalam keadaan lain mungkin himpunan semua orang di Palu, himpunan semua segitiga, himpunan semua segi empat, atau himpunan semua titik pada suatu bidang datar didefinisikan sebagai himpunan semesta.

Suatu himpunan dapat digambarkan dalam suatu diagram yang biasa disebut diagram *Venn-Euler* atau ada yang hanya menyebut diagram Venn saja. Himpunan semesta biasa digambarkan sebagai persegi panjang dan himpunan bagian-himpunan bagian digambarkan sebagai kurva-kurva tertutup sederhana.

Contoh 4.5

1) Jika S = {1, 2, 3, 4, 5, . . ., 10} sebagai himpunan semesta, A = {1, 3, 5, 7, 9} dan B = {3, 5, 7}, maka diagram Venn dari himupnan-himpunan ini tampak pada Gambar 4.1 berikut ini.



Gambar 4.1

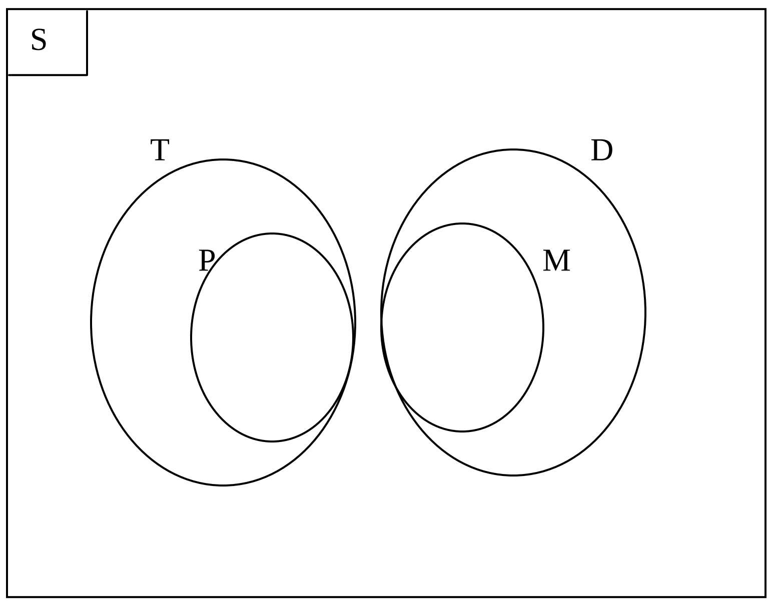
2) Apabila $P = \{x \mid x \text{ persegi}\}$

$T = \{y \mid y \text{ persegi panjang}\}$

$M = \{t \mid t \text{ belah ketupat}\}$

$D = \{r \mid r \text{ jajargenjang}\}$

Maka kita dapat menetapkan himpunan semestanya adalah $S = \{k \mid k \text{ segiempat}\}$. Perhatikan bahwa semua himpunan itu merupakan himpunan bagian dari S. Tentu boleh pula, kita memilih $K = \{k \mid k \text{ bangun geometri datar}\}$ sebagai himpunan semestanya. Jika S sebagai himpunan semestanya, diagram Venn dari himpunan-himpunan itu dapat dilihat pada Gambar 4.2 berikut ini.



Gambar 4.2

3) Jika $A = \{a \mid a \text{ bilangan asli}\}$

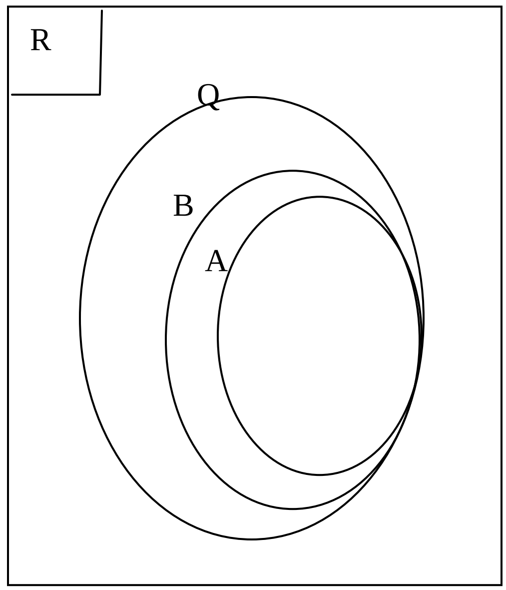
$B = \{b \mid b \text{ bilangan bulat}\}$

$Q = \{q \mid q \text{ bilangan rasional}\}$ dan

$R = \{r \mid r \text{ bilangan real}\}$

Maka kita dapat menetapkan R sebagai himpunan semesta. Kita dapat pula memilih $K = \{t \mid t \text{ bilangan kompleks}\}$ sebagai himpunan semesta. Pemilihan himpunan semesta tergantung pada permasalahan yang dihadapi, tetapi harus diingat bahwa himpunan-himpunan pada permasalahan yang dihadapi harus merupakan himpunan bagian-himpunan bagian dari himpunan semesta yang dipilih. Jadi, jika kita dihadapkan himpunan-himpunan A, B, Q, dan

R seperti di atas, maka kita tidak boleh memilih A, B, atau Q sebagai himpunan semestanya. Apabila R sebagai himpunan semesta, maka diagram Venn dari himpunan-himpunan A, B, dan Q terlihat pada Gambar 4..3 berikut ini.



Gambar 4.3

b. Dua Himpunan Sama

Dua himpunan A dan B dikatakan sama (ditulis A = B) jika setiap anggota A merupakan anggota B, dan setiap anggota B merupakan anggota A pula. Atat dapat ditulis.

$A = B$ jhj $(\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$ & $(\forall y, y \in B \Rightarrow y \in A)$

Atau ditulis lebih singkat menjadi A = B jhj $A \subset B$ & $B \subset A$. Hal ini secara formal dinyatakan sebagai definisi berikut ini.

Definisi 4.2 Himpunan-himpunan A dan B dikatakan sama (ditulis A = B) jika A merupakan himpunan bagian dari B dan B merupakan himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian, dikatakan A tidak sama dengan B (ditulis $A \neq B$

Contoh 4.6

1) Jika A = {1, 2, 3, 4} dan B = {4, 2, 1, 3}, maka A = B
2) Jika A = {x | x bilangan asli} dan B = {y | y bilangan bulat positif}, maka A = B

3) Jika P = {1, 2} dan K = { x | $x^2 - 3x + 2 = 0$ dan x bilangan real}, maka P = K
4) Jika M = { x | x huruf pembentuk kata “matematika”} dan N = {k, e, t, a, m, i}, maka M = N

c. Dua Himpunan Ekuivalen

Dua himpunan berhingga A dan B dengan n(A) = n(B), yaitu banyaknya anggota A sama dengan banaknya anggota B, maka dkatakan bahwa himpunan A ekuivalen dengan himpunan B (ditulis A ~ B). Misalnya, A = {1, 3, 5, 7, 9} dan B = {a, b, c, d, e} adalah dua himpunan yang ekuivalen, atau ditulis A ~ B. Apabila himpunan M sama dengan himpunan N, maka M ~ N, tetapi tidak sebaliknya. Perhatikan bahwa ketentuan tersebut hanya dikhususkan untuk himpunan-himpunan yang berhingga saja. Untuk himpunan-himpunan tahingga yang ekuivalen didefinisikan dengan menggunakan pengertian korespondensi satu-satu yang akan dibahas pada materi berikutnya.

d. Dua Himpunan Lepas (Saling Asing)

Dua himpunan yang tidak kosong A dan B dikatakan saling asing/lepas (ditulis A//B) dan dibaca A lepas dengan B jika dua himpunan itu tidak mempunyai anggota persekutuan, atau setiap anggota A bukan anggota B dan setiap anggota B bukan anggota A

Contoh 4.7

B. Jika A = {1, 2, 3, 4, 5} dan B = {7, 8, 9, 16}, maka A//B

C. Jika P = {k, e, t, a, m} dan T = {p, u, r, I, n, g}, maka P//T

D. Jika M = {1, 2, 3, 4, 5, 6} dan N = {x | x = 3 dan x bilangan asli}, maka M tidak lepas dengan N

4. Operasi-Operasi pada Himpunan

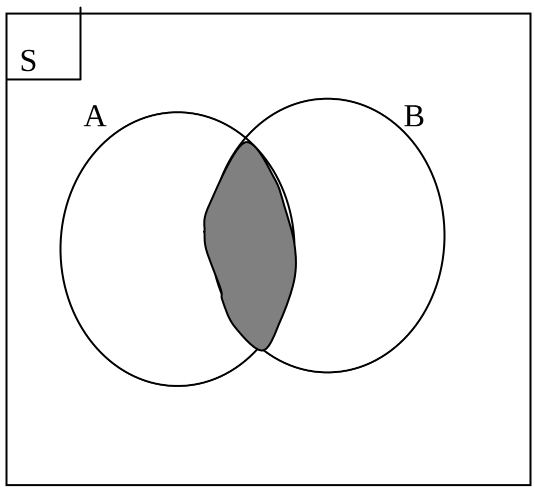
Apabila diketahui dua himpunan atau lebih, kita dapat membentuk himpunan baru dengan mengoperasikan himpunan-himpunan yang diketahui tersebut. Operasi-operasi pada himpunan-himpunan adalah Irisan ($\cap$), gabungan ($\cup$), selisih (-) dan komplemen ($\ldots^C$, atau $\ldots^1$)

a. Irisan

Definisi 4.3
Irisan dari himpunan A dan himpunan B (ditulis $A \cap B$ dan dibaca A irisan B) adalah himpunan semua anggota persekutuan himpunan A dan himpunan B, atau dengan kata lain, himpunan yang anggota-anggotanya adalah semua anggota himpunan A yang sekaligus sebagai anggota B.
Atau dapat ditulis sebagai;

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \;\&\; x \in B\}$$

Diagram Venn dari $A \in B$ tampak pada gambar 4.4, yaitu daerah yang diarsir



Gambar 4.4

Contoh 4.8

1) Jika A = {1, 2, ,3,4, 5} dan B = {1, 3, 5, 7, 9}, maka $A \cap B$ = {1, 3, 5}
2) Jika P = {r, o, t, i} dan Q = {m, a, u, n}, maka $P \cap Q$ = Ø. Selanjutnya dikatakan bahwa himpunan-himpunan P dan Q saling lepas (saling asing) dan disimbolkan dengan P//Q, dibaca P saling kepas dengan Q. Dua himpunan dikatakan saling lepas jika dan hanya jika himpunan itu bukan himpunan kosong dan tidak mempunyai anggota persekutuan.
3) Jika M = {p, a, n, j, e, r} dan N = {j, e, r, a}, maka $M \cap N$ = {j, e, r, a} = N

Memperhatikan definisi di atas maka dapat disimpulkan bahwa $A \cap B = B \cap A$. Dengan kata lain, operasi irisan pada himpunan-himpunan bersiaft komutatif. Memperhatikan definisi irisan tersebut dan mengingat sifat asosiatif konjungsi, maka dapat disimpulkan bahwa noperasi irisan pada himpunan juga bersifat asosiatif, yaitu:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

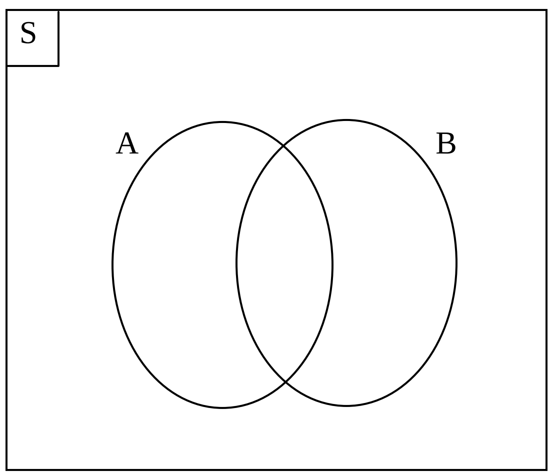
Memperhatikan definisi irisan pada himpunan itu pula, kita dapat menarik kesimpulan bahwa $A \cap B$ termuat baik dalam A maupun B, yaitu:

$$(A \cap B) \cap C \text{ dan } (A \cap B) \cap C$$

b. Gabungan

> Definisi 4.4
> Gabungan dari himpunan A dan himpunan B (ditulis $A \cup B$ dan dibaca A gabung B) adalah himpunan dari semua anggota himpunan A atau himpunan B atau dapat ditulis sebagai berikut.
> $$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Diagram Venn dari $A \cup B$ tampak pada gambar 4.5, yaitu daerah yang diarsir.



Gambar 4.5

Contoh 4.9

1) Jika A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} dan B = {2, 4, 6, 8, 10}, maka $A \cup B$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10}
2) Jika P = {a, n, g, l, o, s} dan Q = {l, o, g, a, s}, maka $P \cup Q$ = {a, n, g, l, o, s} = P

Dari definisi gabungan dua himpunan tersebut dan mengingat sifat komutatif disjungsi, maka dapat disimpulkan bahwa operasi gabungan pada himpunan-himpunan bersaifat yaitu:

$$A \cup B = B \cup A$$

Demikian pula, dengan memperhatikan definisi gabungan tersebut dan mengingat sifat disjungsi, maka dapat disimpulkan bahwa operasi gabungan pada himpunan-himpunan juga bersifat asisiatif.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Dari definisi gabungan ini dapat pula disimpulkan bahwa baik himpunan A maupun himpunan B masing-masing termuat dalam $A \cup B$, yaitu: $A \in A \cup B$ dan $B \in A \cup B$

Sifat distributif

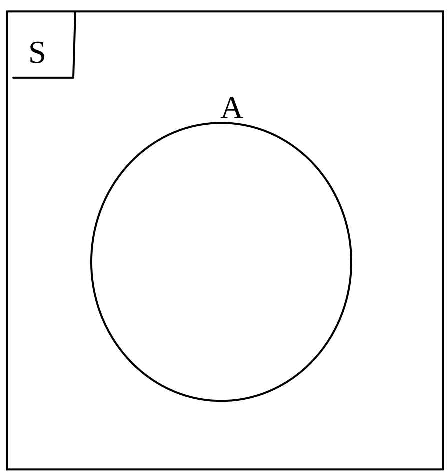
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

c. Komplemen Suatu Himpunan

Definisi 4.5
Misalkan S adalah suatu himpunan semesta, maka komplemen data himpunan A (ditulis A^c dibaca komplemen) adalah himpunan dari semua anggiota himpunan semesta S yang bukan merupakan anggota A. Atau dapat ditulis sebagai berikut.

$$A^c = \{x \mid x \in S \ \& \ x \notin A\}$$

Diagram Venn dari A^c tampak pada Gambar 4.6, yaitu daerah yang diarsir.



Gambar 4.6

Contoh 4.10

1) Misalkan S = {1, 2, 3, 4, 5, . . . , 10} sebagai himpunan semesta
Jika A = {1, 2, 3, 4, 5}, maka A^c = {6, 7, 8, 9, 10}. Jika B = {1, 3, 5, 7, 9}, maka B^c = {2, 4, 6, 8, 10}. Jika D = {1, 5, 10}, maka D^c = {2, 3, 4, 6, 7, 8, 9}. Dan jika E = Ø, maka E^c = S

2) Misalkan B = {x | x bilangan bulat} sebagai himpunan semesta. Jika A = {x | x bilangan asli}, maka A^c = {x | x bilangan bulat tidak positif}. Jika G = {2n | n bilangan bulat}, maka G^c = {2n + 1 | n bilangan bulat.

Dari definisi komplemen suatu himpunan tersebut, apabila A sembarang himpunan dalam suatu himpunan semesta S, maka

$$A \cup A^c = S,\ (A^c)^c = A,\ S^c = \varnothing \text{ dan } \varnothing^c = S$$

Hukum De Morgan

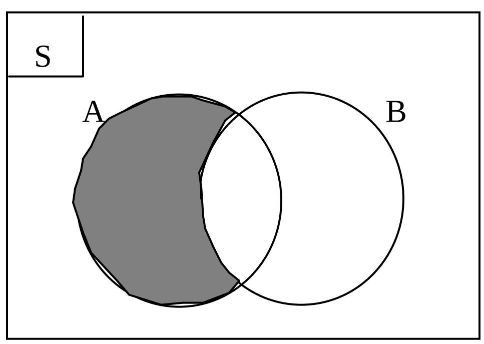
1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

d. Seleisih Dua Himpunan

Definisi 4.6
Himpunan A dikurangi himpunan B (ditulis A – B dan dibaca "A kuang B") adalah himpunan dari anggota-anggota himpunan A yang bukan merupakan anggota B.
Atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B)$$

Diagram Venn dari A – B tampak pada Gambar 4.7, yaitu daerah yang diarsir.



Gambar 4.7

Contoh 4.11

1) Misalkan A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} dan B = {4, 5, 6, 7, 8}, maka A – B = {1, 2, 3} dan B – A = {7, 8}
2) Misalkan P = {p, e, r, h, u, t, a, n, i} dan Q = {h, a, n, t, t, u}, maka P – Q = {p, e, r, i} dan Q – P = Ø
3) Apabila B = {x | x bilangan bulat} dan G = {2x | x bilangan bulat}, maka B – G = {2x - 1 | x bilangan bulat} dan G – B = G

B. Relasi

Sebelum mendefinisikan produk Cartesius, terlebih dahulu Anda perlu mengenal pengertian *pasangan terurut*. Dalam sistem koordinat Cartesius dengan sumbu x dan sumbu y, kita mengetahui bahwa titik dengan koordinat (2,5) tidaklah sama dengan titik yang berkoordinat (5,3). Begitu pula titik (4,7) dengan (7,4) tidak berimpit letaknya maka kedua titik ini tidak sama. Dalama hal koordinat titik seperti contoh di atas ternyata bahwa urutan pasangan bilangan itu harus diperhatikan karena urutan yang berlainan akan menentukan letak (posisi) titik dalam bidang XOY yang berbeda pula.

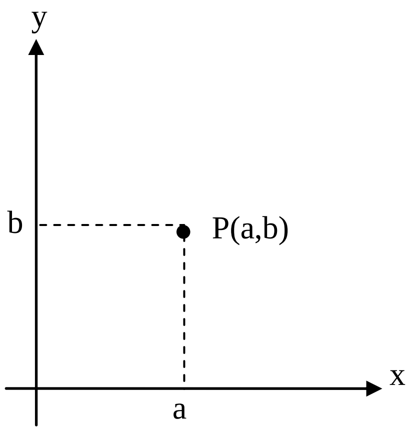
Sepasang bilangan x dan y dengan x dalam urutan pertama dan y dalam urutan kedua, ditulis (x, y) dan dinamakan *pasangan terurut*. Selain itu, perlu pula untuk kita ketahui tentang perbedaan pasangan terurut (x,y) dengan himpunan {x, y}. Himpunan {x, y} sama dengan {y, x} karena dalam himpunan urutan tidak dipentingkan.

Sekarang kita perhatikan A dan B sebagai dua himpunan yang diketahui. Dari kedua himpunan ini kita dapat membentuk suatu himpunan baru yang anggota-anggotanya merupakan pasangan terurut yang unsur pertamanya adalah anggota-anggota A dan unsur keduanya adalah anggota-anggota B. Himpunan yang baru dibentuk ini dinamakan *Produk Cartesius* (produk cartesius) dari A ke B atau disebut pula *himpunan perkalian dari A ke B*, dan ditulis A x B dibaca “A kros B” atau “A kali B” atau “A silang B”.

Definisi 4.7 Jika A dan B dua himpunan maka produk Cartesius dari A ke B adalah himpunan semua pasangan trurut (x, y) dengan $x \in A$, $y \in B$ yang ditulis A x B = $\{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$

Contoh 4.12

1) Andaikan kita dapat membeli suatu model sepeda motor dengan warna pilihan tertentu maka dapat kita pandang model dan warna tersebut sebagai unsur produk Cartesius dua himpunan yaitu model sepeda motor dan warna. Misalnya, unsur produk Cartesius itu adalah (vespa, biru), (honda, merah), (suzuki, hitam), dan sebagainya.
2) Jika R = $\{x \mid x$ himpunan bilangan real$\}$ maka R x R merupakan himpunan semua pasangan terurut (a, b) dengan $a \in R$ dan $b \in R$ yang salah satunya dapat dituliskan oleh salah satu titik P(a, b) pada bidang XOY seperti Gambar 4.8



Gambar 4.8

3) Misalkan A = {1. 2, 3} dan B = {a, b} maka;

   A x B = {(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)}

   B x A = {(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)}

   A x A = {(1, 1), (1, 2,), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3,2), (3, 3)}

   B x B = {(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)}

Pada contoh di atas dapat di tentukan n(A) = 3 dan n(B) = 2 maka jelaslah bahwa n(A x B) = 3 x 2 = 6. Secara umum jika P dan Q dua himupunan dengan n(P) = p dan n(Q) = q, maka n(P) x n (Q) = p . q

Perhatikan pula bahwa P x Q *tidak sama dengan* Q x P bila P ≠ Q (lihat kembali contoh di atas).

Istilah "relasi" yang dapat diartikan "hubungan" sudah sering Anda dengan, misalnya "ayah" dengan "anak", hubungan "guru" dengan "murid", dan sebagainya. Dalam matematika, untuk mendefinisikan sebuah relasi, kita perlu memahami pengetian tentang himpunan, pasangan terurut, perkalian himpunan (*produk cartesius*) dan kalimat terbuka. Materi-materi ini tentunya telah kita pelajari.

Untuk mendefinisikan suatu relasi R diperlukan:

1. suatu himpunan A
2. suatu himpunan B
3. suatu aturan atau kalimat matematika terbuka.

Untuk lebih jelasnya perhatikan uraian berikut, misalnya:

1. himpunan tiga orang siswa SMP: A = {Ajid, Enal, Aulia}
2. himpunan nomr sepatu: B = {37, 38, 39, 40, 41}

   Diketahui bahwa:

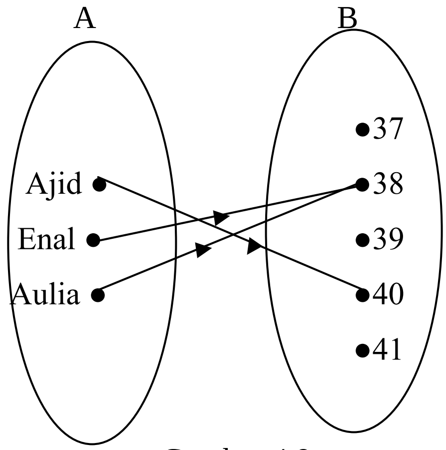
   Ajid memakai sepatu nomor 40

Enal memakai sepatu nomor 38

Aulia memakai sepatu nomor 38

Dari keterangan di atas dapat kita tentukan suatu relasi dari himpunan orang (A) ke himpunan nomor sepatu (B) yang relasinya disebut “nomor sepatunya” atau “memakai sepatu nomor”.

Bila relasi di atas dinyatakan dengan diagram panah maka dapat dilihat pada Gambar 4,9



Gambar 4.9

Tanda panah menyatakan anggota-anggota yang berelasi, dan anak panah menunjukkan arah relasi tersebut, yaitu dari A ke B. Arah itu tidak boleh terbalik, sebab relasi dari A ke B tidak sama dengan relasi dari B ke A.

Relasi di atas dapat pula dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut, misalnya “ Ajid memakai sepatu nomor 40” cuku ditulis singkat (Ajid, 40). Demikian pula untuk yang lainnya. Jadi relasi tersebut bila kita tulis dengan bentuk pasangan terurut adalah:

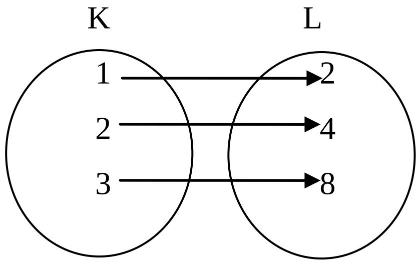
R = {(Ajid, 40), (Enal, 38), (Aulia, 38)}

Definisi 4.8 Relasi R dengan suatu kalimat terbuka dari himpunan A ke himpunan B adalah sebuah himpunan yang anggota-anggotanya semua pasangan terurut (x, y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$ sedemikian rupa sehingga kalimat terbukanya menjadi benar

Contoh 4.13

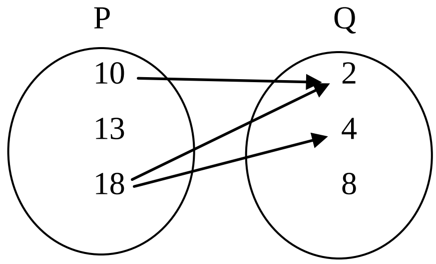
Gambar berikut berturut-turut menunjukkan diagram panah relasi

1. “setengah dari” dari himpunan K ke L (Gambarm4.10)
2. “kelipatan dari” dari himpuan P ke Q (Gambar 4.11)



Gambar 4.10

Diagram Panah Relasi R
"Setengah Dari"



Gambar 4.11

Diagram Panah Relasi T
"Kelipatan Dari"

Seperti kita telah ketahui bahwa selain dengan diagram panah, relasi di atas dapat pula disajikan dalam bentuk pasangan terurut seperti berikut ini.

1. R = {(1, 2), (2, 4), (3, 6)}
2. T = {(10, 2), (16, 2), (16, 4)}

Perlu diketahui bahwa jika $(a, b) \in R$ artinya a R b dan " a berelasi R dengan b", sedangkan jika $(x, y) \notin R$ artinya $x \not R\, y$ dan dibaca "x tidak berelasi dengan y"

Dari contoh di atas, jelas bahwa:

$(1, 2) \in R$ berarti 1 R 2

$(2, 4) \in R$ berarti 2 R 4, dan

$(3, 4) \in R$ berarti 3 R 6, sedangkan

$(2, 6) \notin R$ berarti $2 \not R\, 6$, dan sebagainya.

Himpunan K dan himpunan P dari dua contoh di atas dinamakan *domain* (daerah asal) relasi, kemudian himpunan L dan Q dinamakan *kodomain* (daerah kawan) relasi. *Range* (daerah hasil) relasi dari contoh 4.13 Gamabar 4.10 tidak sama dengan contoh 4.13 Gambar 4.11. Daerah hasil (range) dalam contoh 4.13 Gambar 4.10 adalah himpunan L, kebetulan sama dengan kodomainnya, yaitu (2, 4, 6), sedangkan daerah hasil (range) dari contoh 4.13 Gambar 4.11 adalah (2, 4), yang merupakan himpunan bagian dari kodomainnya (Q).

Pada contoh 4.13 Gambar 4.10 rangenya sama dengan kodomain, sebab setiap unsur dari domain mendapat pasangan sama di kodomainnya. Sedangkan pada contoh 4.13 Gambar 4.10 rangenya berbeda dengan kodomainnya, sebab yang mendapat pasangan dari domainnya sebagian dari kodomainnya, yaitu himpunan {2, 4} saja.

Contoh 4.14

Misalkan A dan B adalah himpunan bilangan asli. Untuk kalimat terbuka, misal P(x, y) dan kita tentukan "x membagi y". Dalam contoh ini misalnya:

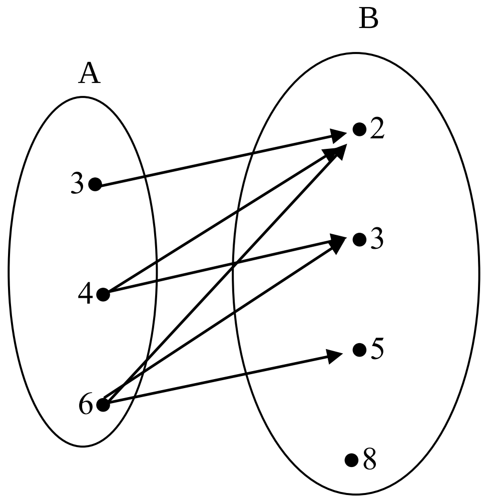
$P(3, 12) \in R$ benar, sebab berlaku relasi 3 R 12, sedangkan

$P(2, 7) \in R$ salah, sebab $2 \not R\, 7$, jadi $P(2, 7) \in R$, dan sebagainya.

Contoh 4.15

Jika A = {3, 4, 6}, B = {2, 3, 5, 6} dan aturan dari relasi R yang memasangkan anggota – anggota B adalah “lebih besar dari” maka relasi R ini dapat kita nyatakan dalam berbagai cara berikut ini.

1. Diagram panah



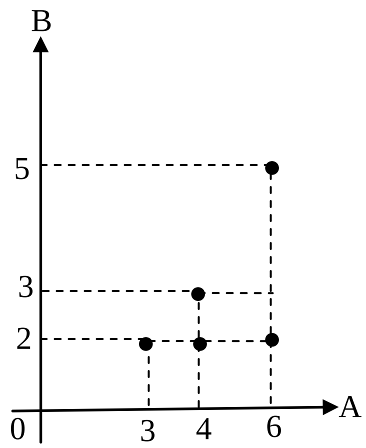
Gambar 4.12

2. Pasangan terurut

   R = {(3, 2), (4, 2), (4, 3), (6, 2), (6, 3), (6, 5)}

3. Diagram koordinat (grafik)

   Suatu relasi dapat pula disajikan dalam diagram koordinat dan untuk menggambarkan relasi R dengan diagram koordinat, kita ambil dua salib sumbu, yang satu mendatar dan yang satunya lagi vertikal, sedangkan anggota-anggota R ditandai dengan noktah-noktah seperti Gambar 4.13.



Gambar 4.13

Dari contoh di atas jika dicari domain, kodomain, dan range dari relasi R tersebut maka berturut-turut adalah sebagai berikut:

Domain D = {3, 4, 6} = himpunan A

Kodomain K = {2, 3, 5, 6} = himpunan B

Rangenya R_g = {2, 3, 5}

Jika kita perhatikan relasi R dari A ke B, kemudian kita bandingkan dengan produk Cartesius (perkalian himpunan) dari A ke B maka jelas bahwa relasi R itu merupakan bagian dari A x B. Secara umum pernyataan ini dikenal sebagai definisi dari relasi yang lebih populer.

> Definisi 4.9
> Jika A dan B himpunan yang diketahui dan di antara anggota-anggotanya ditentukan suatu relasi R dari A ke B maka relasi R ini merupakan himpunan bagian dari A x B. Daerah asal (domain) dari relasi R tersebut adalah himpunan bagian dari A yang terdiri dari elemen pertama dari semua pasangan terurut anggota R. Sedangkan daerah hasil (range) dari relasi R terdiri dari elemen kedua pada semua pasangan terurut pada R

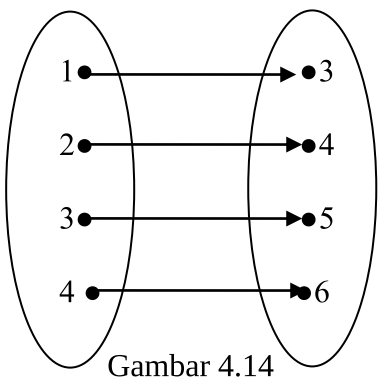
Domain = D = $\{x \mid x \in A, (x, y) \in R\}$

Range = R_g = $\{x \mid x \in B, (x, y) \in R\}$

Contoh 4.16

1) Sebutkan daerah asal dan daerah hasil dari relasi pasangan terurut {(1, 1), (2, 4), (3, 5), (4, 6)}!
2) Gambarlah diagram panah dari relasi tersebut!

1) Daerah asal (domain) D = {1, 2, 3, 4}, dan daerah hasil (range) adalah R_g = {3, 4, 5, 6}
2) Diagram panahnya:



Gambar 4.14

Contoh 4.16 di atas dapat pula dibuat diagram koordinatnya.

Setiap relasi R dari himpunan A ke himpunan B yang didefinisikan R = $\{x \mid x \in A, y \in B\}$, kalimat terbuka P(x, y) benar, selalu mempunyai relasi invers R^{-1} dari himpunan B ke himpunan A yang didefinisikan $R^{-1} = \{(x, y) \mid (x, y) \in R\}$

Jadi dapat kita katakan bahwa R^{-1} adalah semua pasangan terurut yang bersifat bahwa jika elemen dalam pasangan itu ditukar maka pasangan terurut yang baru ini adalah anggota R.

Contoh 4.17

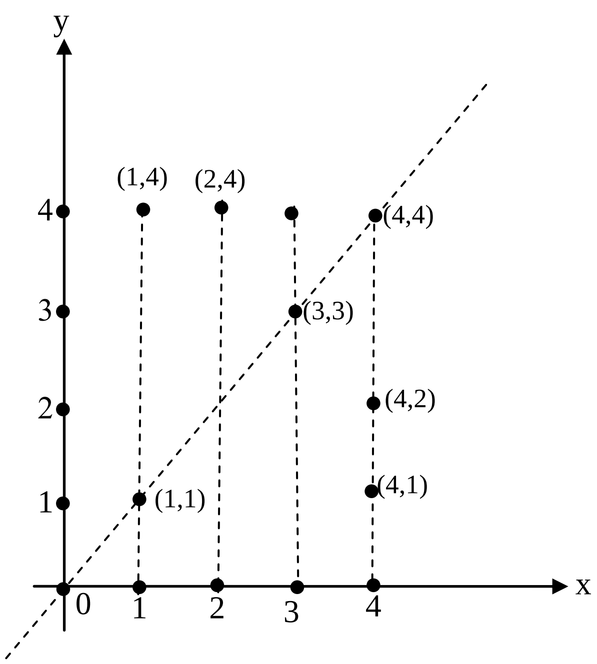
Misalkan A = {1, 2, 3} dan B = {a, b} maka R = {(1, a), (1, b), (3, a)} adalah sebuah relasi dari A ke B. Relasi inversnya yaitu R^{-1} = {(a, 1), (b, 1), (a, 3)}.

Jadi jelas bahwa jika R sebuah relasi dari A ke B, maka R^{-1} adalah sebuah relasi dari B ke A. Unsur-unsur relasi invers R^{-1} dicari berdasarkan kepada jika $(x, y) \in R$ maka $(y, x) \in R^{-1}$ dengan titik (y, x) diperoleh dengan cara mencerminkan titik (x, y) terhadap garis y = x. Jadi, titik (y, x) adalah peta (bayangan) titik (x, y) dalam pencerminan terhadap garis y = x.

Contoh 4.18

Misalkan V = {1, 2, 3, 4} dengan R = {(1, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 4)} adalah sebuah relasi dalam V maka R^{-1} = {(1, 1), (4, 2), (3, 3), (1, 4), (4, 4)}

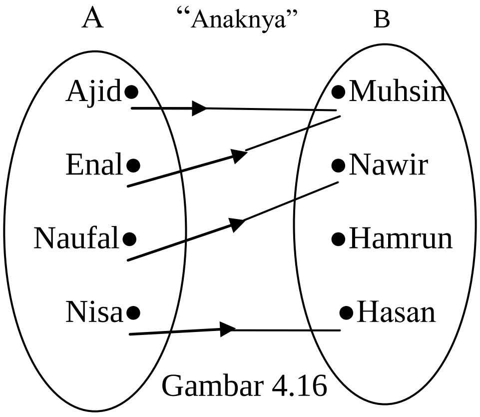
Jelas bahwa titik-titik dalam R^{-1} adalah peta titik-titik R tehadap refleksi (pencerminan) pada garis dengan persamaan y = x. Laihat Gambar 4.15



Gambar 4.15

C. Fungsi

Perhatikan relasi "anaknya" dari himpunan anak-anak (A) ke himpunan ayah-anyahnya (B) seperti yang ditunjukkan dengan diagram panah berikut.



Gambar 4.16

Setiap anak hanya mempunyai satu ayah sehingga setiap anggota A dipasangkan dengan tepat satu anggota B.

Relasi yang demikian dinamakan fungsi (pemetaan). Jadi, fungsi adalah bentuk yang khusus dari suatu relasi.

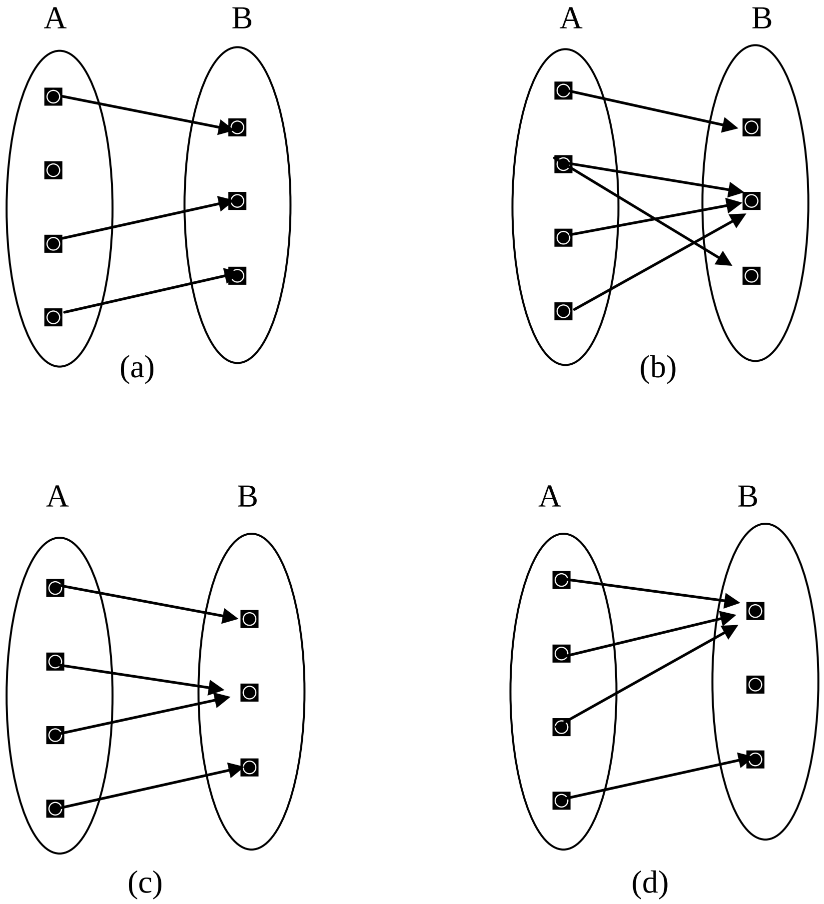
Seperti halnya relasi maka untuk mendefinisikan suatu fungsi diperlukan tiga hal pula, yaitu berikut ini.

1. Himpunan A
2. Himpunan B
3. Suatu kalimat terbuka, yang juga disebut aturan yang mengaitkan tiap elemen $x \in A$ dengan suatu elemen tunggal $y \in B$.

> Definisi 4.10
> Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi yang memasangkan setiap anggota dari A dengan tepat satu anggota dari B. Hal ini ditulis:
> $$F{:}A \rightarrow B$$

Contoh 4,19

Diagram panah berikut menunjukkan relasi dari himpunanj A ke himpunan B. Relasi mana yang merupakan fungsi?



aGambar 4.17

Jawab.

1. Bukan fungsi, sebab ada sebuah unsur dari A yang tidak punya pasangan pada B
2. Bukan fungsi, sebsb ada sebuah unsue dari A yang berpasangan dengan dua unsur dari B
3. Fungsi, sebab setiap unsur dari A dipasangkan dengan tepat satu anggota dari B
4. Fungsi, sebab setiap unsur dari A dipasangkan dengan tepat satu anggota dari B

Contoh 4.20

Misalkan, A himpunan negara di dunia dan B himpunan ibu kota negara, kemudian f adalah kalimat terbuka “y ibu kota x” sehingga $y \in B$ dan $x \in A$ dan y = f(x) adalah sebuah fungsi. Misalnya f(Indonesia) = Jakarta

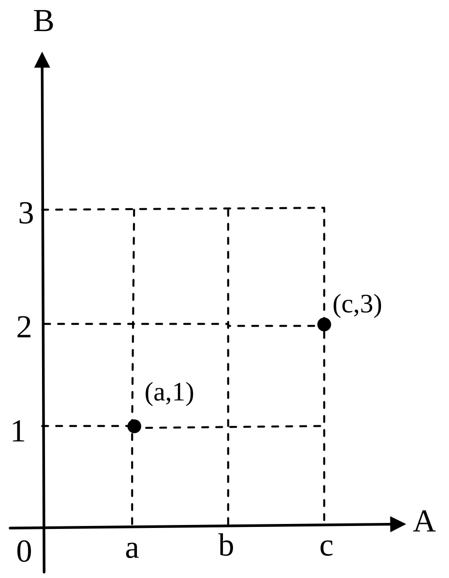
Misalkan, f suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B, jadi $f: A \rightarrow B$. Grafik f^* dari fungsi f terdiri dari semua pasangan terurut dengan $a \in A$ sebagai anggota pertama, dan petanya (bayangannya) adalah f(a) sebagai anggota kedua, secara matematis dapat kita tulis dalam bentuk:

$$F^* = \{(a, b) \mid a \in A, b = f(a)\}$$

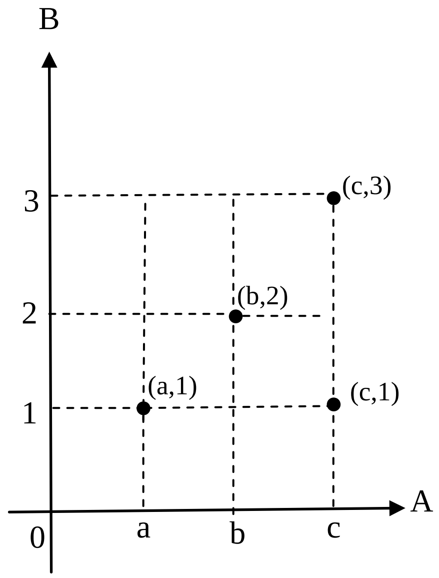
Perlu diperhatikan bahwa f^*, yaitu fungsi f: A→B adalah himpunan bagian dari A x B

Contoh 4.21

Misalkan, himpunan A = {a, b, c} dan B = {1, 2, 3}, kemudian perhatikan himpunan titik pada diagram koordinat (gambar 4.18). Himpunan titik pada Gambar 4.18 bukan merupakan grafik fungsi dari A ke B oleh karena garis vertikal yang melalui $b \in A$, tidak memuat sebuah titik yang ada dalam himpunan tersebut.



Gambar 4.18



Gambar 4.19

Sedangkan himpunan titik pada Gambar 4.19 juga bukan merupakan grafik fungsi dari A ke B karena garis vertikal yang melalui $c \in A$ memuat dua titik yang berbeda yang ada dalam himpunan tersebut.

Misalkan $f^* \subseteq A \times B$ dan f^* memiliki sifat sebagai berikut.

1. Untuk tiap $a \in A$, ada pasangan terurut $(a, b) \in f^*$
2. Tidak ada dua pasangan terurut berlainan dalam f^* yang memiliki elemen pertama sama.

Dengan demikian, pada tiap $a \in A$ ada tepat satu elemen $b \in B$ sehingga $(a. b) \in f^*$. Sifat (1) menjamin bahwa tiap elemen $a \in A$ mempunyai peta dalam himpunan B sehingga sifat (2) menjamin bahwa peta ini adalah tunggal. Dengan demikian, f mendefinisikan sebuah fungsi dari A ke B.

Jadi, ada korespondensi antara fungsi f: A→B dengan himpunan bagian dalam A x B yang memiliki sifat (1) dan (2). Akibatnya, sebuah fungsi f dapat pula didefinisikan sebagai berikut.

> Definisi 4.11
> Suatu fungsi f dari A ke B adalah himpunan bagian dari A x B yang bersifat bahwa tiap $a \in A$, sebagai anggota pertam,a hanya dalam satu pasangan terurut yang berada di f^*

Contoh 4.22

Misalkan A = {a, b, c} dan B = {1, 2, 3}, sedangkan f^* = {(a, 2), (c, 1), (b, 2)}; maka jelaslah f adalah sebuah fungsi dari A ke B sebab memenuhi definisi 2 di atas sifat (a) dan (2)

Contoh 4.23

Misalkan V = {1, 2, 3} dan W = {a, e, i, o, u}. sedangkan f^* = {(1, a), (2, b), (3, i), (2, u)} maka f bukanlah sebuah fungsi karena elemen $2 \in V$ terdapat dua kali sebagai elemen pertama dalam pasangan terurut yang berbeda, yaitu (2, e) dan (2, u).

Seperti pada relasi, pada fungsi juga ada domain (daerah asal) dan range (daerah hasil). Definisinya sama saja, yaitu f: A→B maka:

Daerah asal (domain): $D = \{x \mid x \in A, (x,y) \in f\}$

Daerah hasil (range): $R_g = \{y \mid y \in B, (x, y) \in f = f(A)\}$

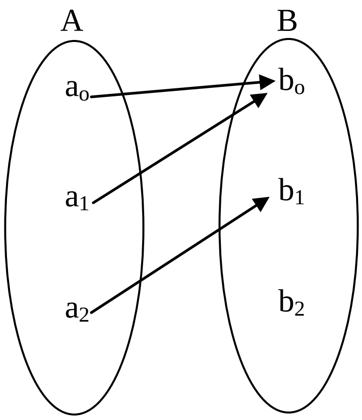
Daerah kawan (kodomain) = B, dengan $f(A) \subseteq B$.

1. Fungsi ke dalam (Into)

Jika f: A → B dan $f(A) \subset B$ maka f dinamakan *fungsi ke dalam* (fungsi into). Ini berarti ada unsur $b \in B$ yang tidak merupakan peta (bayanag) suatu unsur $a \in A$.

Contoh 4.24

1) $f : A \xrightarrow{kedalam} B$



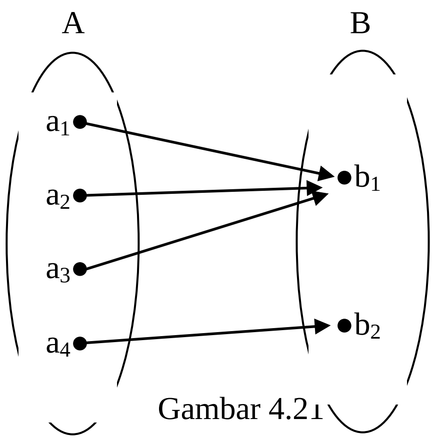
Gambar 4.20

2. Fungsi kepada (Onto)

Jika f: $A \to B$ dan f(A) = B maka dinamakan *fungsi kepada* (fungsi Onto). Ini berarti setiap elemen $b \in B$ adalah peta (bayangan) dari paling sedikit satu elemen $a \in A$.

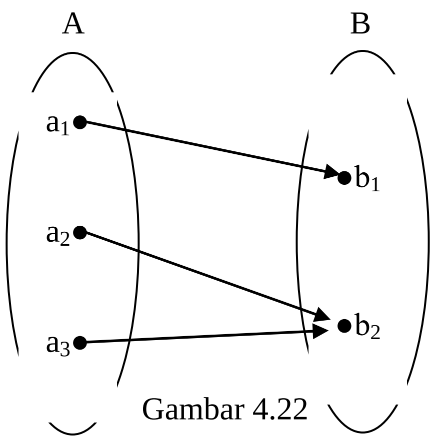
Contoh 4.25

1) f: $A \xrightarrow{kepada} B$



Gambar 4.21

2) f : $A \xrightarrow{kepada} B$



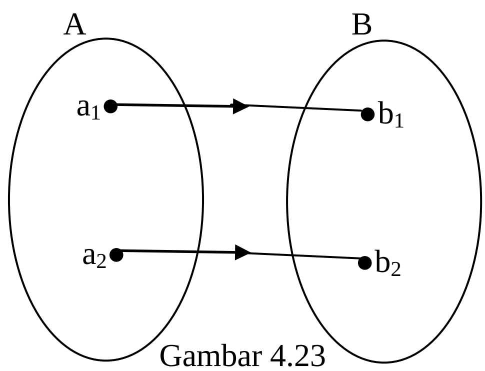
Gambar 4.22

3. Fungsi 1-1 (satu-satu)

Misalkan fungsi f: $A \to B$, dan untuk setiap a_1, $a_2 \in A$, dengan $a_1 \neq a_2$ berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$ maka f dinamakan *fungsi* 1-1 dari A ke B.

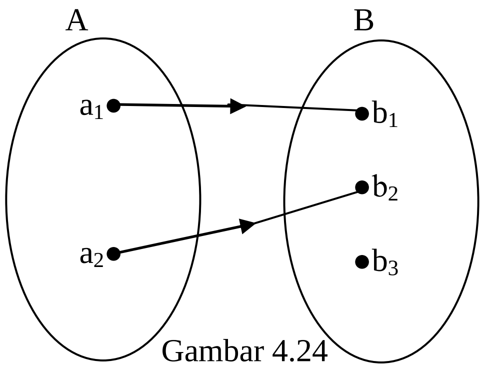
Contoh 4.26

1) f : $A \xrightarrow{1\text{–}1} B$



Gambar 4.23

2) $f : A \xrightarrow{1-1} B$

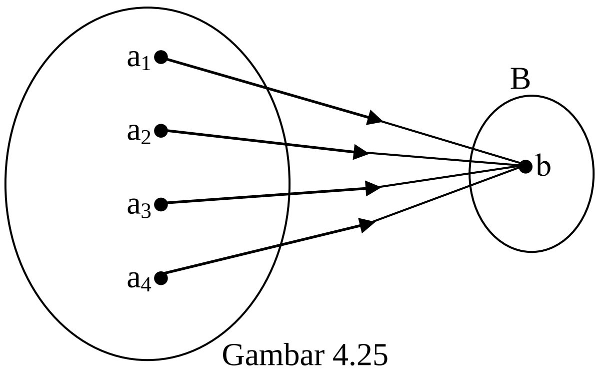


Gambar 4.24

4. Fungsi Konstan

Jika fungsi $f : A \to B$ bersifat bahwa setiap $a \in A$ dipetakan pada satu unsur $b \in B$ maka f dinamakan *fungsi konstan* dari A ke B (Gambar 4.25)

Contoh 4.27

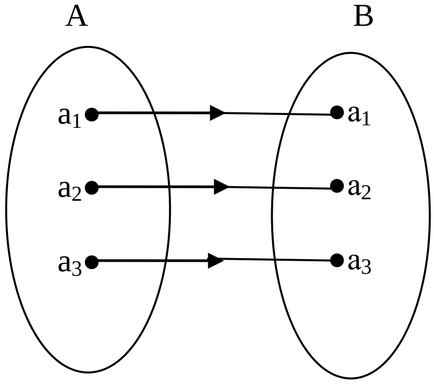


Gambar 4.25

5. Fungsi Identitas

Jika fungsi $f : A \to B$ dengan B = A dan f(a) = a untuk setiap $a \in A$ maka f dinamakan fungsi identitas. (Gambar 4.26)

Contoh 4.28



Gambar 4.26

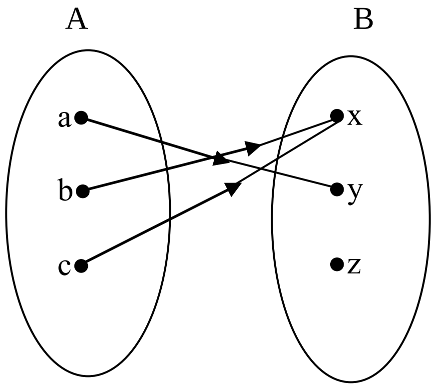
Misalkan, diketahui suatu fungsi f : A $\rightarrow$ B, b $\in$ B maka invers b (terhadap fungsi f) yang dilambangkan dengan f^{-1}(b), adalah himpunan anggota dalam A yang elemen petanya adalah b. Jadi, dapat kita tulis:

$$f^{-1}(b) = \{x | x \in A, f(x) = b\}$$

Perlu diperhatikan bahwa f^{-1}(b) $\subseteq$ A, sedangkan f^{-1} dibaca "invers fungsi f".

Contoh 4.29

Misalkan f : A $\rightarrow$ B yang didefinisikan oleh diagram panah pada Gambar 4.27. Disini tampak bahwa f^{-1}(x) = {b, c}, sebab b dan c dipetakan oleh fungsi f pada elemen yang sama, yaitu x $\in$ B. Selanjutnya f^{-1}(y) = {a}, sebab hanya a yang petanya adalah y $\in$ B. Sedangkan f^{-1}(z) = { } atau Ø (himpunan kosong), sebab tidak ada elemen dalam A, yang petanya adalah x $\in$ B.



Gambar 4.27

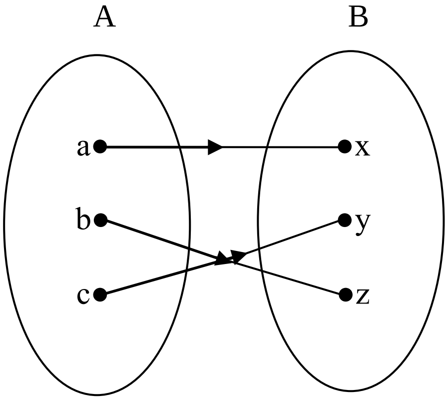
Misalkan, fungsi f : A $\rightarrow$ B. Pada umumnya f^{-1}(b) dapat terdiri lebih dari satu elemen, bahkan dapat pula kosong. Jika f : A $\rightarrow$ B suatu fungsin yang satu-satu dan kepada (1-1 onto) maka *untuk tiap b $\in$ B, himpunan f^{-1}(b) terdiri atas tepat satu elemen dalam* A. Dengan demikian, ada aturan yang mengaitkan tiap elemen b dalam B dengan satu elemen tunggal f^{-1}(b) di A. Dengan demikian, f^{-1} adalah senuah fungsi dari b ke A. Jadi, f^{-1} : B $\rightarrow$ A adalah suatu fungsi.

Sebagai kesimpulan jika f: A $\rightarrow$ B fungsi satu-satu dab jepada (1-1 onto) maka f^{-1} : B $\rightarrow$ A adalah sebuah fungsi juga, yang dinamakan *fungsi invers* dari f.

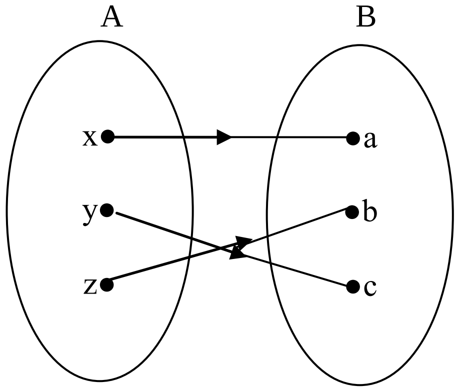
Namun apabila f : A $\rightarrow$ B fungsi dan himpunan pasangan terurut yang didapat dengan menukarkan setiap pasanagn terurut (a, b) $\in$ f menjadi (b, a) dan diberi lambang f^{-1} maka himpunan f^{-1} tidak merupakan suatu fungsi.

Contoh 4.30

Misalkan f : A $\rightarrow$ B yang didefinisikan seperti yang digambarkan pada diagram panah (Gambar 4.28), perhatiakan bahwa f satu-satu dan kepada (1-1 onto) maka f^{-1} adalah fungsi invers dan f^{-1} : B $\rightarrow$ A dilukiskan oleh Gambar 4.29.



Gambar 4.28



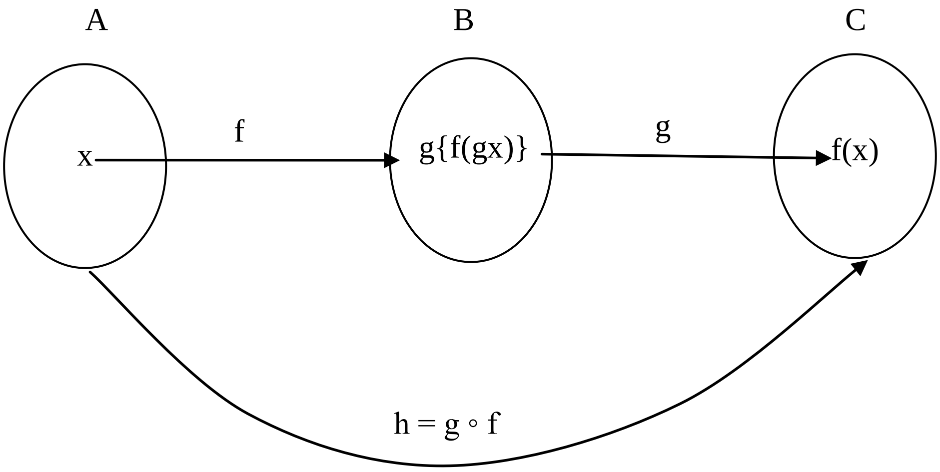
Gambar 4.29

Contoh 4.31

Misalkan, A = {1, 2, 3} dan B = {a, b,} dengan fungsi f = {1, a), (2, b), (3, a)} merupakan fungsi kepada maka f^{-1} {(a, 1), (b, 2), (a, 3)} dan ternyata f^{-1} bukan merupakan fungsi karena terdapat dua pasangan terurut yang mempunyai unsur pertama sama, yaitu (a, 1) dan (a, 3). Jadi f^{-1} bukan merupan fungsi invers.

Misalkan f: A $\rightarrow$ B dan g: B $\rightarrow$ C dengan f dan g adalah fungsi. Jika a $\in$ A maka f(a) $\in$ B yang merupakan domain dari g. Dengan demikian, peta dari f(a) terhadap g yang ditulis g(f(a)) $\in$ C. Jadi, didapatkan fungsi baru dengan domain A ke daerah kawan C.

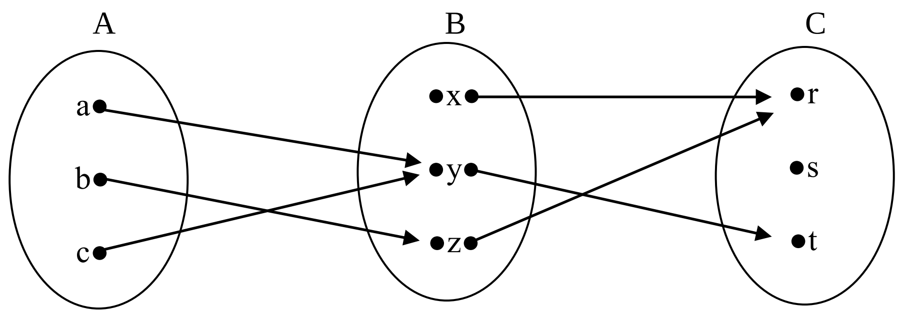
Fungsi h: A $\rightarrow$ C dilambangkan dengan g $\circ$ f (dibaca “g bundaran f”), dengan h disebut fungsi komposisi (fungsi tersusun) dari f dan g. Perhatikan Gambar 4.30



Gambar 4.30

Contoh 4.32

Misalkan diketahui dua fungsi f: $A \rightarrow B$ dan g: $B \rightarrow C$ seperti pada Gambar 4.31, di bawah ini:



Gambar 4.31

Misalkan fungsi komposisi h = g ∘ f : A $\rightarrow$ C didefinisikan sebagai berikut.

(g ∘ f) (a) = g(f(a)) = g(y) = t, pasangan terurutnya (a, t)

(g ∘ f) (b) = g(f(b)) = g(z) = r, pasangan terurutnya (b, r)

(g ∘ f) (c) = g(f(c)) = g(y) = t, pasangan terurutnya (c, t)

Jadi, h = g ∘ f = {(a, t), (b, r), (c, t)}

Contoh 4.33

Misalkan R himpunan bilangan real dan suatu fungsi f: $R \rightarrow R$ didefinsikan bahwa f(x) = x^2, sedangkan g: R $\rightarrow$ R didefinisikan bahwa g(x) = x + 3. Jika h(x) = (f ∘ g)(x) maka h(2) = (f ∘ g)(2).

$\Rightarrow$ h(2) = f(g(2)), ingat bahwa g(x) = x + 3 $\Rightarrow$ g(2) = 2 + 3 = 5

$\Rightarrow$ h(2) = f(5), ingat pula bahwa f(x) = x^2 $\Rightarrow$ f(5) = 5^2 = 25

$\Rightarrow$ h(2) = 25

Sekarang jika h(x) = (g ∘ f)(x) maka h(2) = (g∘f)(2) $\Rightarrow$ h(2) = g(f(2)), ingat bahwa f(x) = x^2 sehingga f(2) = 2^2 = 4, jadi

$\Rightarrow$ h(2) = g(4), ingat pula bahwa g(x) = x + 3 $\Rightarrow$ g(4) = 4 + 3 = 7

$\Rightarrow$ h(2) = 7

Dari uaraian di atas dapat kita simpulkan bahwa hasil f ∘ g dan g ∘ f tidak harus sama

Selanjutnya untuk mencari rumus umum untuk f ∘ g dan g ∘ f untuk fungsi-fungsi yang didefinisikan seperti di atas dapat kita cari sebagai berikut.

h(x) = (f ∘ g)(x)

$\Rightarrow$ h(x) = f(g(x)), g(x) = x + 3, jadi g(x) dalam fungsi f diganti x + 3

$\Rightarrow$ h(x) = f(x + 3), ingat bahwa f(x) = x^2 sehingga f(x + 3) = $(x + 3)^2$, jadi

$\Rightarrow$ h(x) = x^2 + 6x + 9

h(x) = (g ∘ f)(x)

$\Rightarrow$ $h(x) = g(f(x))$, $f(x) = x^2$ jadi $f(x)$ dalam fungsi g diganti x^2,

$\Rightarrow$ $h(x) = g(x^2$, ingat bahwa $g(x) = x + 3$ sehingga $g(x^2) = x^2 + 3$, jadi

$\Rightarrow$ $h(x) = x^2 + 3$

Dari contoh ini, jelas bahwa fungsi komposisi tidak memenuhi sifat komutatif.

Contoh 4.34

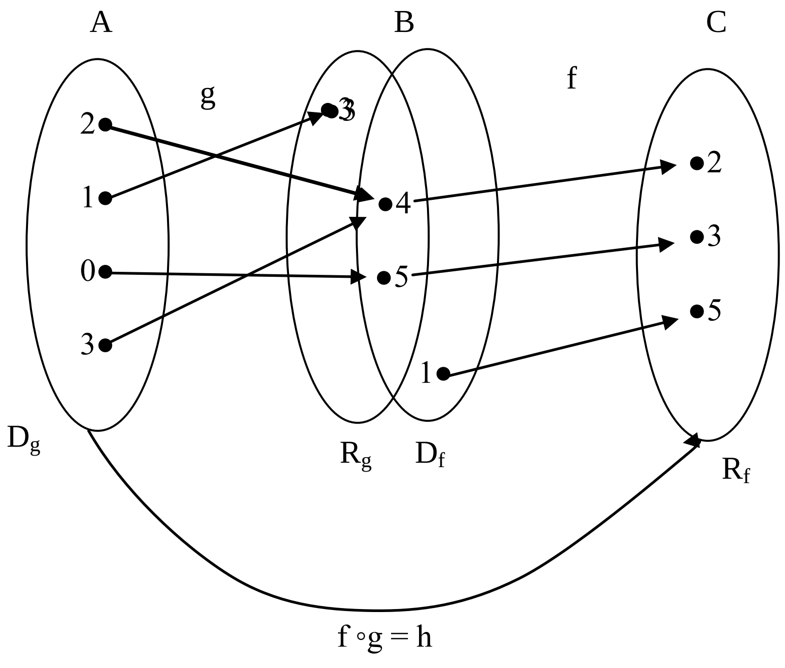
Misalkan g = {(2, 4), (1, 3), (0, 5), (3, 4)}, dan f = {(4, 2), (5, 3), (1, 5)} Tentukan himpunan-himpunan pasangan terurut dari $h = f \circ g$.

Jawab.

x	$\rightarrow$	g(x)	$\rightarrow$	f(g(x)) = h
2		4		2
1		3		Tidak terdefinisi
3		4		2
0		5		3

$\therefore h(x) = f(g(x)) = f \circ g = \{(2, 2), (3, 2), (0, 3)\}$

Gambar diagram panahnya adalah sebagai berikut.



Gambar 4.32

Diagram Gambar 4.32, ini jelas bahwa syarat terdefinisinya fungsi komposisi $f \circ g$ adalah $R_g \cap D_f = \emptyset$.

Perhatikan pula, $D_{f \circ g} \subseteq D_g$. Misalnya, untuk contoh 4.34 ini $D_g = \{2, 1, 0, 3\}$, sedangkan $D_{f \circ g} = \{2, 0, 3\}$. Coba Anda perhatikan kembali contoh 4.33, dari contoh tersebut dapat ditentukan bahwa $D_f = \{a, b, c\}$, sedangkan $D_{g \circ f} = \{a, b, c\}$

Jadi, $D_{g \circ f} = D_f$.

Catatan:

D_f = Domain fungsi f R_f = Range fungsi f

D_g = Domain fungsi g R_g = Range fungsi g

RANGKUMAN

1. Pasangan terurut unsur x dan y yang diberi symbol (x, y) adalah suatu pasangan yang unsure pertamanya x dan unsur keduanya y.
2. Perkalian dua himpunanj A dan B (ditulis A x B) adalah himpunan pasangan terurut yang unsur pertamanya anggota A dan unsure keduanya angora B, yaitu $A \times B = \{(x, y): x \in A$ dan $y \in B\}$
3. Relasi (R) dari himpunan A ke himpunan B adalah himpunan bagian dari hasil perkalian himpunan A dan B yaitu $R \subseteq A \times B$.
4. Relasi R $a \in A$ disebut refleksif jika dan hanya jika $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$
5. Relasi R disebut simetris jika dan hanya jika $(a, b) \in R$ maka $(a, b) \in R$ untuk setiap $a, b \in A$.

LATIHAN

1. Diketahui A = {a, b, c, d, e, f}.
   a. Berapakah banyaknya himpunan bagian dari A yang masing-masing mempunyai dua anggota?
   b. Berapakah banyaknya himpunan bagian dari A yang masing-masing mempunyai empat anggota?
   c. Berapakah banyaknya semua himpunan bagian dari A?

2. Diketahui relasi R = {(1, 5), (22, 10), (3, 15), (4, 20)}. Tentukan;
   a. Daerah asalal (domanin)nya
   b. Daerah hasil (range)nya
   c. Diagram panah dan diagram kartesiusnya
   d. Aturan relasinya.
3. Jika A = $\{x \mid -2 \le x \le 2, x \in R\}$ dan f: A $\mapsto$ R ditentukan oleh $f(x) = x^2 + 2$, untuk setiap $x \in A$.

   a. Lukis grafik dari f! b. Tentukan daerah hasilnya.

DAFTAR PUSTAKA

Graham, Malcolm.1975. *Modern Elementary Mathemathics Second Edition*. New York: Harcourt Brace Jovanovich, Inc.

Hudojo H., As'ari A.: Yuwono, I,: Supeno, I. 1992. *Pendidikan Matematika II*. Jakarta: Dikti-Depdikbud.

Hudojo H., Sutawidjaja A. 1997. *Matematika*. Jakarta: Dikti-Depdikbud

Lipschutz, Seymour. 1981. *Theory and Problemks of Sd Theory and Rekates Topis*.Singapore McGraw-Hill International Book Company.

Stoll, Robgert R. 1976. *Set Theory and Logic*. NewDelhi: Eurasia Publishing House (PVT) Ltd.

Sukirman. 2006. *Logika dan Himpunan*. Yogyakarta: Hanggar Kreator.

Sukirman. 2007. *Matematika*. Jakarta: Universitas Terbuka

Wheeler, R.E. 1992. *Modern Mathematics*, Belmont, CA: Wodsworth.

PEMECAHAN MASALAH

Drs. Zainuddin, M.Pd

Kegiatan belajar mengajar 5 ini akan membahas tentang pemecahan masalah. Kegiatan belajar mengajar 5 ini mencakup 3 pokok bahasan, yaitu pokok bahasan I tentang pengertian masalah dan kelasifikasi masalah, pokok bahsan II tentang prosedur pemecahan masalah. Dengan mempelajari kegiatan belajar mengajar 5 ini, Anda akan mempunyai wawasan yang lebih luas tentang masalah dann pemecahan masalah di dalam mkelaksanakan tugas sebagain guru maupun dalam kehidupan sehari-hari.

Indikator yang diharapkan diacapai mahasiswa setelah mempelajari kegiatan belajar mengajar 5 ini adalah mahasiswa dapat;

1. menunjukkan kondisi yang harus dipenuhi terjadinya masalah
2. menyebutkan klasifikasi masalah amatematika
3. menjelaskan metode heuristis pemecahannmasalah
4. menggunakan metoden heuristis dalam menyelesaikan persoalan matematika
5. menyebutkan alasan pembelajaran pemecahan masalah

Agar mahasiswa dapat menguasai kegiatan belajar mengajar 2 ini, maka baca dan pelajari secermat mungkin, baik pokok bahasan maupun sub-sub pokok bahasan yang disajikan berikut.

A. Pengertian Masalah

Kata “masalah” memiliki arti yang sangat komprehensif. Masalah hampir selalu ada dalam kehidupan sehari-hari. Jika sesuatu merupakan masalah bagi kita maka kita akan berusaha sesuatu tadi menjadi bukan masalah bagi kita. Kita mengusahakan suatu perbuatan untuk membuat sesuatu tadi menjadi bukan masalah.

Apakah pengertian masalah?
Perhatikan Alinea berikut!

> Mendapatkan makanan umumnya bukan suatu masalah dalam kehidupan modern, masa kemerdekaan sekarang ini. Jika saya lapar dan saat itu saya sedang di rumah sendiri maka saya akan menuju lemari makan untuk mendapatkan makanan atau dapat juga saya pergi ke warung penjual makanan yang dekat dengan rumah saya. Dengan demikian, saya mudah mendapatkan makanan untuk mengobati rasa lapar saya saat itu. Tetapi akan berbeda apabila ternyata saat itu di lemari makan kosong, tidak ada makanan atau saat itu saya tidak mempunyai uang untuk membeli makanan di warung. Tentu saja saya mengalami kesulitan untuk mendapatkan makanan menjadi menjadi masalah bagi saya.

Perhatikan juga kondisi-kondisi yang digambarkan berikut!

Kondisi 1: Saat pukul 21.00 tidak ada lampu menyala dan tidak ada cahaya yang masuk dalam sebuah ruangan. Di ruangan itu Ani sedang tidur pulas, ia tidak mengetahui situasi saat itu.

Kondisi 2: Ani sedang belajar sambil mendengarkan radionya, Tiba-tibab radio tak bersuara. Ani mencoba menghidupkan radio dengan membetulkan posisi baterai radionya, tetapi tidak berhasilo. Ani memutuskan baterai radionya habis, dan Ani melanjutkan belajar.
(Ani beranggapan bahwa pengalaman tadi bukan bagian penting dari belajarnya sehingga bukan nmasalah bagi Ani).

Kondisi 3: Menjelang tengah malam, lampu padam. Ani melihat saklar lampu dalam keadaan on (hidup), tetapi Ani langsung tidur saja.
(Ani memahami situasi saat itu dan melakukan suatu perbuatan, tetapi Ani tidak memerlukan lampu atau tidak mengusahakan lampu menyala sehingga situasi itu bukan masalah bagi Ani)

Kondisi 4: Ani sedang belajar sambil mendengarkan radio. Tiba-tiba radio tak bersuara Ani mencoba menghidupkan radio dengan membetulkan posisi baterai radionya.
(Ani memahami situasi saat itu dan ia mengusahakan suatu perbuatan (mesikupun sebenarnya tidak perlu bagi belajarnya) sehingga mungkin situasi tadi merupakan masalah bagi Ani).

Kondisi 5: Ani sedang belajar, ketika lampu padam. Ani tidak menghentikan belajarnya karena ia ingin berhasil dalam ujian besok pagi.
(Ani memahami situasi saat itu, mengetahui apa yang harus diperbuat, dan tindakan apa yang harus dilakukannya (meskipun ia tidak melakukannya) sehingga situasi saat itu mungkin bukan nmasalah bagi Ani).

Kondisi 6: Ani sedang belajar, ketika lampu padam. Ani membutuhkan lampu agar dapat melanjutkan belajar untuk ujian besok pagi. Ani pergi ke luar rumah menuju pusat sirkuit listrik rumahnya (boks meteran listrik). Ani mengetahui saklar sirkuit dalamk keadaan off, Ani membetulkan saklar saklar dalam keadaan on, dan lampu menyala kembali, Ani dapat belajar kembali.
(Meskipun Ani memahami situasi saat itu, (Ani mengetahui apa yang harus diperbuat, melakukan perbuatan itu, dan memberikan hasil), ntetapi situasi tadi bukan masalah bagi Ani karena Ani mudah menemukan penyelesaiannya).

Kondisi 7: Ani sedang belajar ketika listrik padam, Ani ingin melanjutkan belajar. Ani menanyakan kepada Dewi tetangganya, bagaimana menghidupkan saklar pusat siukuit listrik. Dewi menunjukkan caranya. Ani mencoba melakukan petunjuk Dewi, tetapi listrik tak kunjung menyala. Ani memberi tahu nkepada Dewi bahwa ia telah melakukan petunjuk Dewi, tetapi listrik tidak hidup juga. Dewi berjanji akan meminjami lampu minyak. Ani kembali ke rumahnya meskipun listrik masih padam, ia duduk dan membunyikan radio, dan ternyata radio berbunyi dan terdengar siaran RRI. Beberapa menit kemudian Dewi dating membawa lampu minyak yang dijanjikan pada Ani. Dengan lampu minyak dari Dewi, Ani dapat melanjutkan belajarnya sehingga masalah Ani dapat terselesaikan.

Situasi yang dialami Ani tadi merupakan elemen-elemen masalah bagi seorang siswa yang sedang belajar. Ani menghadapi beberapa macama masalah dan telah mendapatkan penyelesaiannya. Apabila situasi yang sama dialami lagi oleh Ani, ia akan mengetahui bagaimana menanganinya. Sehingga situasi tersebut bukan lagi masalah bagi Ani karena Ani dapat menyelesaiakannya.

Pada dasarnya masalah muncul pada situasi yang tidak diharapkan oleh seseorang. Situasi yang tidak diharapkan terjadi pada Si A, mungkin dianggap sebagai masalah, mungkin juga tidak bagi Si A sendiri. Situasi yang tidak diharapkan terjadi pada Si A, dianggap sebagai masalah bagi Si A, tetapi mungkin tidak bagi Si B. Suatu masalah dikatakan masalah besar jika masalah itu teramat sulit di cari penyelesaiannya. Sebaiknya, suatu masalah dikatakan masalah kecil jika masalah itu tidak sulit dicari penyelesaiannya. Tingkat kesulitan suatu masalah tergantung pada kerumitan masalah itu; dimana tidak ada kerumitan maka tidak ada masalah.

Suatu masalah terjadi apabila kondisi-kondisi berikut dipenuhi:

1. Seseorang tidak siap dengan prosedur untuk mencari penyelesaiannya,
2. Seseorang menerimanya sebagai tantangan dan menyusun suatu tindakan untuk menemukan penyelesaiannya.

B. Klasifikasi Masalah

Perhatikan contoh berikut:

Contoh 5.1:
Ajid membawa sekantong plastik berisi dua macam buah yang baru dibelinya di pasar. Kantong itu berisi buah jeruk dan buah apel. Sebuah jeruk harganya seratus lima puluh rupiah, sedangkan sebuah apel harganya dua ratus rupiah. Untuk sekantong plastik itu ia harus membayar lima ribu rupiah. Berapa banyak buah jeruk dalam kantong plastik itu?

Jika kita menggunakan suatu cara untuk menyelesaikan masalah terseebut, tentu kita harap akan mendapatkan penyelesaiannya. Sebelum menyelesaikan suatu masalah, kita perlu mengetahui tipe masalah tersebut. Jika kita dapat menentukan tipe suatu masalah yang kita hadapi maka kita dapat memperkirakan apakah bmasalah ntersebut dapat diselesaikan atau tidak dapat diselesaikan. Agar kita mengetahui tipe suatu masalah, kita perlu mengetahui klasifikasi masalah.

Pengklasifikasian masalah matematika didasarkan pada struktur matematika yang dimulai dari aksioma, definisi, dan “proporsi" (dari Euclid). Sebuah proposisi membawa kita pada suatu masalah penemuan atau pada suatu masalah pembuktian. Misalnya, akan digambar sebuah segitiga sama sisi dengan ukuran 6 cm; *merupakan masalah bagi kita untuk menunjukkan gambar segitiga yang dimaksud*; akan dihitung hasil kali 5 dengan 3; *merupakan masalah bagi kita untuk menentukan hasil perkalian dua bilangan tersebut*, Misalnya, akan ditunjukkan bahwa jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180^0; *merupakan suatu masalah bagi kita untuk menunjukkan atau membuktikan benar atau salah bahwa jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah* $180^{0.}$

Masalah matematika diklasifikasikan menjadi 2, sebagai berikut:

1. Masalah penemuan

   Menunjukkan gambar, ementukan hasil perhitungan, mengientifikasi, dan sebagainya suatu obyek tertentu yang tidak diketahui.
2. Masalah pembuktian

   Memutuskan apakah pernyataan tertentu benar atau salah dengan membuktikan langsung atau membuktikan kebalikannya.

Misalnya, Anda dihadapkan suatu masalah matematika (soal). Setelah memahami masalah tersebut Anda bertanya dalam hati, “Apakah yang tidak ada dalam masalah ini?” Anda menempatkan masalah yang dihadapkan pada Anda merupakan masalah penemuan. Mungkin juga Anda bertanya, “Mengapa dikatakan demikian?” Anda menempatkan masalah yang dihadapkan pada Anda merupakan masalah pembuktian.

Pada umumnya masalah matematika dapat berupa soal cerita meskipun tidak setiap soal cerita adalah pemecahan masalah. Bagi anak yang belum pernah menemukan soal cerita yang dimaksud maka soal tersebut dapat merupakan soal pemecahan masalah.

Contoh 5.2:
Bu Mira akan membagikan kepada kelima orang anaknya masing-masing 2 butir telur dan 3 potong kue. Oleh karena ada salah satu anaknya nakal, Bu Mira bermaksud menambah jumlah telur dan kue sebagai cadangan, yaitu 5 butir telur dan 5 potong kue. Berapa banyak telur dan kue yang dibeli Bu Mira?

Setelah Anda membaca dan memahami soal di atas maka Anda akan dapat menentukan soal tersebut merupakan masalah penemuan ataukah masalah pembuktian. Untuk menentukan soal tersebut merupakan masalah penemuan atau masalah pembuktian, Anda dapat mencermati pertanyaan dalam soal tersebut. Pertanyaan dalam soal tersebut meminta Anda menentukan banyaknya telur dan kue yang dibeli Bu Mira. Berarti Anda melakukan perhitungan. Oleh karena itu, soal tersebut dapat diklasifikasikan sebagai masalah penemun.

1. Masalah Penemuan

Tujuan masaah penemuan adalah menentukan suatu objek yang tidak diketahui dalam suatu masalah, yang memenuhi kondisi masalah tersebut. Suatu objek tadi apabila digabungkan dalam masalah tersebut akan diperoleh suatu pernyataan yang lengkap dan bernilai benar. Suatu objek yang tidak diketahui dapat berupa sebuah kata, sebuah kalimat, beberapa buah kalimat, atau sebuah alinea.

Dalam masalah geometri, konstruksi yang tidak diketahui adalah sebuah gambar, misalnya diberikan sebuah gambar segitiga ditentukan apakah jenis segitiga tersebut.

Dalam masalah persamaan linear, yang tidak diketahui berupa suatu bilangan, misalnya ,menentukan penyelesaian suatu persamaan. Objek yang ditemukan dari suatu masalah penemuan disebut solusi (penyelesaian) masalah tersebut Dalam masalah matematika, solusi dapat berupa hasil operasi, gambar, daftar, karakteristik, dan sebagainya.

Contoh 5.3:
Lukislah sebuah segitiga ABC, yang diketahui dua buah sisinya, dan garis tinggi ke salah satu sisi tersebut.
(Solusinya) berupa gambar segitiga yang dimaksud.

Contoh 5.4:
Tentukan suku ke-10 dari barisan 1, 3, 4, 7, 11, 18, …
(Solusinya) berupa sebuah bilangan, yaitu 123

Suatu ketika kita dihadapkan pada suatu masalah penemuan, kita tidak dapat memberikan alasan penyelesaian yang tepat. Dalam hal tersebut berarti kita tidak memahami masalah yang diberikan. Oleh karena itu, pada setiap masalah yang diberikan pada kita, kita seharusnya mengerti, dan mengetahui dengan pasti apa yang tidak diketahui dan data yang diberikan dalam masalah tersebut. Selanjutnya, apakah data yang diberikan dan apa yang tidak diketahui terkondisi dengan benar (berhubungan) sehingga kita dapat memutuskan masalah tersebut dapat diselesaikan ataukah tidak.

2. Masalah Pembuktian

Tujuan masalah pembuktian adalah memutuskan benar ataukah salah terhadap suatu pernyataan. Oleh karena itu, masalah pembuktian menuntut adanya alasan-alasan yang kuat pada keputusan yang diberikan. Keputusan (benar atau salah; ya atau tidak; terbukti atau tidak terbukti) harus didahului dengan suatu dugaan. Kemudian, dugaan tersebut dijelaskan dengan melalui kenyataan-kenyataan (data-data; aksioman; definisi; prinsip) yang telah diketahui sehingga dapat diputuskan mengenai dugaan tersebut.

Contoh 5.5:
Penyelesaian persamaan $x^2 - x - 2 = 0$ adalah 2 dan -1

Contoh 5.5 merupakan masalah pembuktian, timbulnya masalah karena ketidakyakinan kita dengan pernyataan itu. Kita menduga mungkin benar, mungkin juga tidak benar. Kita perlu membuktikannya.

Penyelesaian persamaan adalah bilangan-bilangan yang apabila disubtitusikan ke ruas kiri persamaan tersebut menghasilkan 0 (nol). Apabila bilangan 2 disubtitusikan ke dalam ruas kiri persamaan $x^2 - x - 2 = 0$ diperoleh; $2^2 - 2 - 2 = 4 - 4 = 0$ (sama dengan ruas kanan) dan bilangan -1 disubtitusikan ke ruas kiri persamaan $x^2 - x - 2 = 0$ diperoleh; $(-1)^2 - (-1) - 2 = 1 + 1 = 2 = 2 - 2 = 0$ (sama dengan ruas kanan).

Baik bilangan 2 maupun bilangan -1 disubtitusikan ke ruas kiri persamaan $x^2 - x - 2 = 0$ memberikan hasil yang sama, yaitu bilanga 0, berarti 2 dan -1 merupakan penyelesaian persamaan $x^2 - x - 2 = 0$.

Dengan demikian, pernyataan "Penyelesaian persamaan $x^2 - x - 2 = 0$ adalah 2 dan -1" merupakan pernyataan yang bernilai benar. Kita telah membukatikan suatu pernyataan, dan telah menyelsaikan suatu masalah pembuktian.

Contoh 5.6:
Rumus $F(n) = 2^{2^n} + 1$, dengan n = bilangan asli, memberikan suatu bilangan prima. Buktikan pernyataan tersebut!

Contoh 5.6, sudah jelas bahwa masalah yang ditunjukkan merupakan masalah pembuktian. Pertama kita menduga mungkin pernyataan "Bilangan prima dirumuskan dengan $F(n) = 2^{2^n} + 1$, dengan n = bilangan asli" adalah benar. Kedua kita harus meneliti dugaan tersebut sebagai berikut:

Jika p adalah bilangan prima maka factor-faktor dari p adalah 1 dan p.

untuk n = 1 $\quad F(1) = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$

untuk n = 2 $\quad F(2) = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$

untuk n = 3 $\quad F(3) = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$

untuk n = 4 $\quad F(4) = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537$

untuk n = 5 $\quad F(5) = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297$

Bilangan-bilangan 5, 17, 257, dan 65537 adalah prima, tetapi bilangan 4294967297 bukan bilangan prima. Sebab 4294967297 = 6700417 x 641. Jadi rumus $F(n) = 2^{2^n} + 1$, dengan n = bilangan asli tidak selalu memberikan bilangan prima. Sehingga pernyataan "Rumus F(n) = $2^{2^n}+1$, dengan n = bilangan asli, memberikan suatu bilangan prima" terbukti tidak benar.

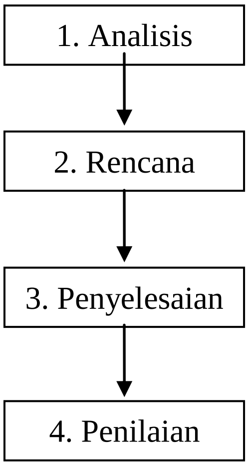
Pemebcahan masalah yang ditunjukkan dari contoh 5 dan 6 merupakan contoh pemecahan masalah pembuktian. Dalam pemecahan masalah contoh 5, data-data yang diberikan langsung dipergunakan sebagai sarana pembuktian. Dalam pemecahan masalah contoh 6 digunakan data-data pendukiung yang sesuai dengan yang diketahui dalam masalah (mengambil bilangan-bilangan asli). Pembuktian dugaan dari masalah dalam contoh 6 dengan menggunakan contoh yang menunjukkan pernyataan yang diberikan tidak berlaku umum (untuk n = 5, ternyata F(5) bukan prima). Kedua macam cara pembuktian tersebut didasarkan pada data-data yang diketahui atau data-data pendukung sebagai semai. Selain penting data-data tersebut digunakan sebagai alat pembuktian pernyataan yang ditunjukkan kondisi yang diketahui dana syaratnya. Coba Anda cermati dari pemecahan masalah baik contoh 5 maupun contoh 6, manakah kondisi yang diketahui dan apakah syaratnya?

C. Prosedur Pemecahan Masalah

Suatu masalah yang bagaimanapun perlu dicari jalan penyelesaiannya dengan sedikit atau banyak pengetahuan untuk menyelkesaikan. Kita mudah membayangkan, bagaimana masalah menjadi sangat serius bagi Si C yang tidak mengetahui bagaimana menyelesaikannya. Si C hanya memperkirakan jalan yang satu atau jalan yang lain untuk menyelwsaikan masalahnya. Si C telah berusaha menemukan jalan keluar dari masalah yang dihadapi. Si C menggunakan kemampuan dan pengetahuan yang dimilikinya. Pengetahuan Si C tersebut menunjukkan pada kita bahwa penyelesaian suatu masalah yang kita hadapi muncul dari dalam diri kita. Kita berusaha menemukan sendiri jalan keluarnya; suatu jalan ke luar yang sulit bagi kita, di sekitar kita mungkin ada jalan ke luar yang mudah. Jika jalan ke luar telah kita peroleh dan kita mengetahui penyelesaiannya, berarti kita telah menyelesaikan masalah yang kita hadapi. Kita telah mengusahakan situasi yang tidak kita harapkan menjadi situasi yang kita harapkan. Atau kita mengusahakan suatu masalah menjadi bukan masalah bagi kita.

Pemecahan masalah dapat didefinisikan sebagai pemulihan kembali situasi yang dianggap sebagai masalah nbagi seseorang yang menyelesaikannya. Pemulihan tersebut melalui serangkaian perbuatan yang secara bertahap dilakukan atau dipenuhi dan berakhir pada hasil yang diperoleh berupa penyelesaian masalah. Perhatikan kembali pengalaman-pengalaman Ani yang digambarkan dalam bagian A. Pemecahan masalah yang dilakukan Ani meliputi beberapa perbuatan secara bertahap dilakukan sehingga Ani menemukan penyelesaian masalahnya, ada yang dapat menyelesaikan masalahnya, tetapi ada juga yang tidak dapat menyelesaikan masalahnya. Suatu perbuatan yang tidak dapat menyelesaikan masalhnya, diusahakan perbuatan yang lain sehingga Ani dapat menemukan penyelesaian masalahnya.

Dari pengalaman Ani tersebut, tampak bahwa pemecahan masalah meliputi serangkaian proses yang dilakukan atau dipenuhi agar diperoleh penyelesaian masalah. Penyelesaian masalah yang diperoleh selanjutnya diingat atau dinilai baik atau tidak, memberikan hasil atau tidak. Proses tersebut me;iputi analisis, rencana, penyelesaian dilanjutkan dengan penilaian, yang dapat diskemakan seperti berikut.



Perhatikan contoh persamaan berikut dan pemecahannya mengikuti prosedur tersebut di atas.

Contoh 5.7:

Jono ingin mendapatkan beberapa buah jeruk dan buah apel. Sebuah jeruk harganya seratus lima puluh rupiah, dan sebuah apel harganya dua ratus rupiah. Jono memberikan selembar uang lima ribuan kepada penjual buah-buahan. Jono mengharapkan dengan uang lima ribuan tersebut ia memperoleh beberapa buah jeruk dan 10 buah apel dan tidak menerima sisa uang pada penjual. Baik Jono maupun penjual tidak dapat memastikan berapa banyak buah jeruk sehingga keduanya tidak ada yang dirugikan.

Contoh tersebut merupakan suatu masalah penemuan. Merupakan masalah baik Jono maupun penjual buah-buahan. Masalah yang dihadapi Jono adalah mendapatkan dengan tepat berapa banyak buah jeruk dari penjual. Masalah yang dihadapi penjual adalah menentukan dengan tepat berapa banyak buah jeruk yang diberikan kepada Jono. Dengan kata lain, baik Jono maupun penjual buah-buahan tersebut menghadapi masalah yang sama, yaitu menentukan banyak buah jeruk sehingga jumlah banyak buah jeruk dan 10 buah apel berharga lima ribu rupiah.

1. Analisis

Tujuannya adalah untuk memperoleh gambaran lengkap dari apa yang diketahui dan dari apa yang dipermasalahkan.

Dari contoh tadi cara analisisnya dapat dituliskan secara ringkas seperti berikut.

Diketahui : sebuah jeruk harganya 150 rupiah, dan sebuah apel harganya 200 rupiah, Jono membayar dengan selembar uang senilai 5000 rupiah. Jono menginginkan memperoleh beberapa buah jeruk dan 10 buah apel.

Ditanyakan: banyak buah jeruk, sedemikian hingga jumlah harga jeruk dan 10 buah apel dihargai dengan 5000 rupiah.

2. Rencana

Tujuannya adalah untuk mengubah permasalahan menjadi sebuah masalah atau soal yang penyelesaiannya secara prinsip dapat diketahui.

Dari contoh tadi tampak bahwa masalah yang timbul dapat diselesaikan dengan perhitungan matematika. Dengan demikian, masalah tersebut dapat diubah ke dalam bentuk model matematika seperti berikut.

Misalkan, r = banyak jeruk, p = banyak apel, dan memenuhi system persamaan:

$P = 10$ (1)

$150\ r + 200\ p = 5000$ (2)

Berapakah r?

3. Penyelesaian

Tujuannya adalah untuk melaksanakan rencana pemecahan. Pelaksanaan rencana pemecahan harus dituliskan dengan jelas dalam bentuk pengerjaan dan hasil.

Penyelesaian masalah dari contoh tadi dituliskan seperti berikut, sesuai dengan prosedur yang berlaku dalam matematika.

Penyelesaian

$r = 10$ (1)

$150\ r + 200\ p = 5000$ (2)

$150\ r + 200 \times 10 = 5000$ (subtitusi p = 10 pada persamaan (2))

$150\ r + 2000 = 5000$

$150\ r = 5000 - 2000$ (kedua ruas dikurangi dengan 2000)

$150\ r = 3000$

$r = \frac{3000}{150}$ (kedua ruas dibagi dengan 150)

$r = 20$

Jadi, banyak jeruk = 20, atau banyak jeruk yang diperoleh Jono adalah 20 buah atau banyak jeruk yang diberikan oleh penjual kepada Jono adalah 20 buah.

4. Penilaian

Tujuannya adalah untuyk memeriksa apakah masalah sudah diselesaaikan dengan tuntas, atau memeriksa apakah penyelesaian sudah atau belum layak sebagai jawaban pertanyaan atau penyelsaian masalah.

Dari contoh tadi, penilaian dapat dilakukan demikian:

Penyelesaian memberikan hasil bahwa banyak jeruk yang diperoleh Jono adalah 20 buah. Dengan mensubtitusikan r = 20 dan p = 10 pada persamaan (2), diperoleh:

150 x 20 + 200 x 10 = 3000 + 200 = 5000

Sebuah jeruk harganya 150 rupiah maka 20 buah jeruk harganya 3000 rupiah. Sebuah apel harganya 200 rupiah maka 10 buah apel harganya 2000 rupiah. Jadi, selembar uang lima ribuan yang diberikan Jono kepada penjual buah-buahan senilai 20 buah jeruk dan 10 buah apel. Jono tidak menerima atau menitipkan sisa uang, dan penjual tidak memberikan buah apel atau jeruk yang tidak dibayarkan oleh Jono. Keduanya untung.

Meskipun kelihatan panjang, prosedur pemecahan masalah yang digambarkan tersebut di atas menunjukkan arah penyelesaian masalah secara logis. Prosedur pemecahan masalah seperti tersebut di atas terlihat sistimatis. Prosedur pemecahan masalah secara sistimatis selalu digunakan oleh para ahli. Pada umumnya para ahli tidak menunjukkan secara eksplisit prosedur pemecahan suatu masalah yang disodorkan padanya, mereka menunjukkan prosedur yang cukup pendek. Tetapi pemecahan masalah yang mereka berikan sistimatis, seperti prosedur yang digambarkan di atas. Prosedur pemecahan masalah seperti tersebut di atas dikenal sebagai ***metode heuristis***.

RANGKUMAN

Pembelajaran pemecahan masalah perlu dilakukaan guru dalam pembelajaran matematika, sebab pemecahan an pemecahan masalah merupakan aktivitas yang penting berkaitan dengan kehidupan sehari-hari. Pemecahan masalah akan meemberikan sejumlah pengalaman bagi siswa dalam memahami materi matematika maupun bidang studi lain. Keaktifan siswa dalam kegiatan pemecahan masalah akan memotivasi siswa dalam belajar matematika.

Sebelum mengajarkan pemecahan masalah kepada siswa, guru perlu membuat rencana, yang meliputi perumusan tujuan, penentuan prasyarat, dan pelaksanaan pengajaran. Pengajaran pemecaham masalah akan menimbulkan hambatan, apabila guru tidak menyusun perencanaan dsengan cermat. Pengajaran pemecahan masalah akan lebih baik bilaa guru menerapkan metode heuristis perencanaan masalah. Tahap demi tahap pemecahan suatu masalah diajarkan kepada siswa agar selanjutnya siswa dapat menyelesaikan sendiri masalah yang dihadapi.

LATIHAN

1. Sebutkan macam-macam soal matematika yang diberikan kepada siswa!
2. Mengapa pembelajaran pemecahan masalah perlu dilakukan dalam pembelajaran matematika?
3. Sebutkan tahap-tahap pemecahan suatu masalah yang perlu diajarkan kepada siswa!

DAFTAR PUSTAKA

Charles F. Brumfiel. 1965. *Fundamental Concepts of Elemetary Mathematics*. London: Addison-Wesley Publishing Company

Herman Hudoyo. 1990. *Pemecahan Masalah di dalam Pengajaran Matematika*. Jakarta: (P3G)

Herman Hudoyo., Akbar S. 1997. *Matematika.* Jakarta: (P3G)

Polya, G. 1973. *How To Solve it*. A New Aspect Mathematical Mehod. New Jersey: Princeton University.

Sukirman. 2007. *Matematika*. Jakarta: Universitas Terbuka

Muhsetyo G. 2007. *Pembelajaran Matematikan SD*. Jakarta: Universitas Terbuka

TRANSFORMASI

Drs. Zainuddin, M.Pd

Tranformasi (perpindahan) yang dipelajari dalam matematika, antara lain translasi (pergeseran), refleksi (pencerminan), rotasi (perputaran), dan dilatasi (perbanyakan). Empat macam transformasi ini akan dipelajari dalam kegiatan belajar mengajar 6 ini.

Kegiatan belajar mengajar 6 ini mencakup 2 pokok bahasan, yaitu pokok bahasan I tentang translasi dan refleksi, pokok bahsan II tentang rotasi dan dilatasi.

Transformasi yang disajikan dalam kegiatan belajar mengajar ini adalah transformasi bidang, yaitu yang memetakan tiap titik pada bidang kesuatu titik pada bidang tersebut. Hal yang sangat bermanfaat dalam mempelajari transformasi ini dalam pengembangannya adalah apabila transformasi itu dilakukan pada bidang koordinat Cartesius. Oleh karena itu, untuk mempelajari materi dalam kegiatan belajar mengajar ini Anda harus memahami dengan baik tentang bidang koordinat Cartesius dan beberapa persamaan garis lurus yang istimewa, misalnya persamaan garis $y = x$, $y = -x$, $y = 0$, dan sebagainya.

Indikator yang diharapkan diacapai mahasiswa setelah mempelajari kegiatan belajar mengajar 6 ini adalah mahasiswa dapat;

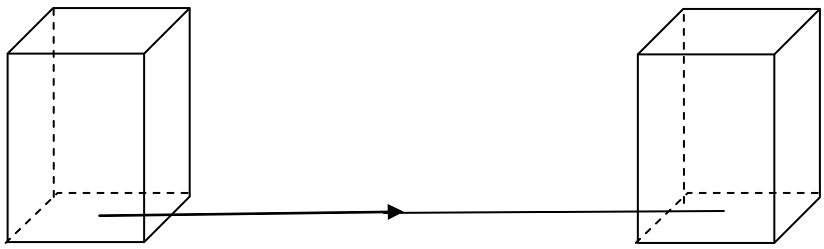
1. menyebutkan ketentuan-ketentuan yang harus dipenuhi pada tiap-tiap jenis transformasi
2. membedakan suatu transformasi dengan transformasi lainnya
3. menentukan bayangan suatu bangun tertentu dengan suatu transformasi yang diberikan
4. menerapkan suatu transformasi dalam menyelesaikan suatu soal dalam geometri
5. menjelaskan komposisi transformasi yang sejenis.

Agar mahasiswa dapat menguasai kegiatan belajar mengajar 2 ini, maka baca dan pelajari secermat mungkin, baik pokok bahasan maupun sub-sub pokok bahasan yang disajikan berikut.

A. Translasi dan Refleksi

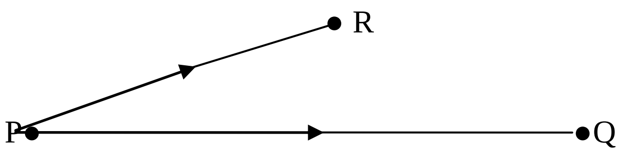
1. *Translasi (Pergeseran)*

Translasi adalah perpindahan suatu benda dari suatu tempat ke tempat lain dapat dilakukan dengan beberapa cara, antara lain dengan pergeseran, perputaran atau lainnya.



Gambar 6.1

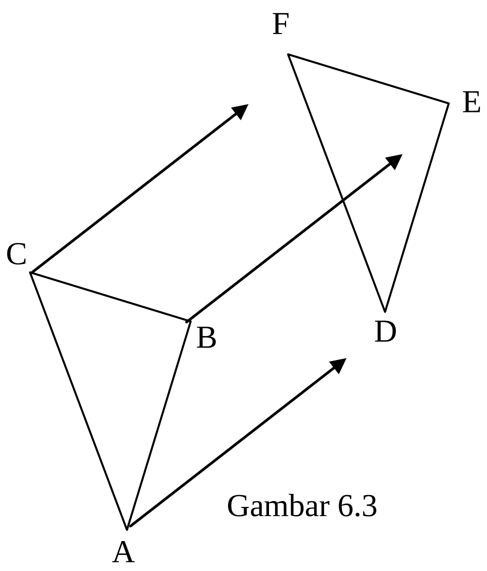
Misalnya suatu kubus dari A digeser sehingga menempati tempat B (Gambar 6.1). Dengan kata lain, perpindahan kubus dari A ke B dilakukan dengan pergeseran *(translasi)*. Setelah pergeseran, kubus tidak berubah besar maupun bentuknya.



Gambar 6.2

Pada Gambar 6.2, titik P digeser (ditranslasi) menjadi titik Q ditulis P $\rightarrow$ Q.

Titik P dapat pula digeser menjadi titik R atau duliskan P $\rightarrow$ R. Tampak di sini bahwa translasi P $\rightarrow$ Q berbeda dengan translasi P $\rightarrow$ R. Apakah perbedaan dua translasi ini. Perbedaan dua translasi itu terletak pada jarak pergeseran dan arah pergeserannya. Pada translasi P $\rightarrow$ Q, jarak (panjang) pergeseran dinyatakan pleh panjang ruas garis PQ dan arah pergeseran dari P ke Q yang dinyatakan dengan arah anak panah. Selanjutnya, panjang dan arah pergeseran pada translasi P $\rightarrow$ Q dinyatakan dengan simbol PQ, PQ menyatakan besar (panjang) pergeseran dan anak panahnya menyatakan arah dari P menuju Q. Selanjutnya, PQ disebut vektor translasi.



Gambar 6.3

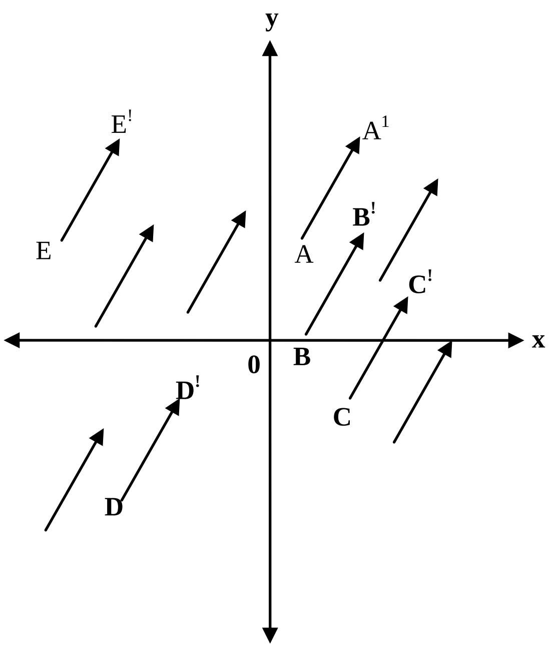
Pada Gambar 6.3 Δ ABC ditranslasikan dengan vektor $\overrightarrow{AD}$ menjadi Δ DEF. Pada translasi ini, $A \rightarrow D$, $B \rightarrow E$, dan $C \rightarrow F$ sehingga vektor-vektor translasi $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ dan $\overrightarrow{CF}$ mempunyai besar (panjang) dan arah yang sama. Atau dikatakan $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$.

Δ DEF disebut bayangan (peta translasi) dari Δ ABC oleh translasi dengan vektor $\overrightarrow{AD}$. Perhatikan bahwa hasil translasi, yaitu Δ DEF dan segitiga yang ditranslasikan, yaitu Δ ABC merupakan dua segitiga yang besar dan bentuknya (bangunannya) sama. Duan bangunan yang besar dan bentuknya sama dikatakan dua bangun yang kongruen (sama dan sebangun).

Pada gambar 6.3, translasi $\overrightarrow{AB}$ memetakan titik A ke B. Translasi $\overrightarrow{BC}$ memetakan titik B ke C. Translasi $\overrightarrow{AB}$ dilanjutkan dengan translasi $\overrightarrow{BC}$ memetakan titik A ke titik C. Translasi $\overline{AB}$ dilanjutkan dengan translasi $\overline{BC}$ di tulis translasi $\overline{AB} + \overline{BC}$, sedangkan translasi $\overrightarrow{AC}$ memetakan titik A ke titik C. Jadi, translasi $\overrightarrow{AB} \oplus \overrightarrow{BC}$ = translasi $\overrightarrow{AC}$;

$$\overrightarrow{AB} \oplus \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Suatu cara yang sangat berguna untuk menggambarkan suatu translasi adalah dengan suatu pasangan bilangan, yaitu apabila kita menggambarkannya pada bidang koordinat Cartesius.



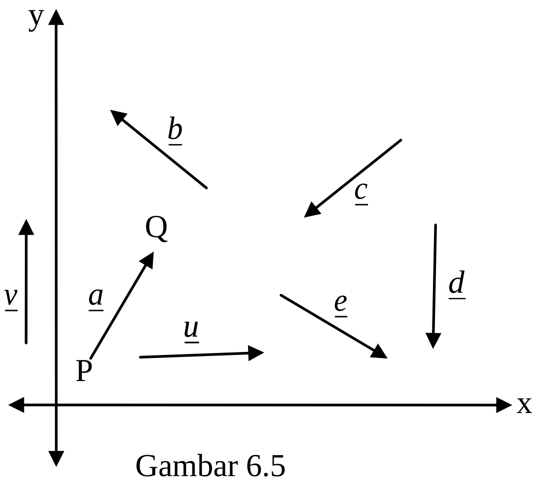
Gambar 6.4

Pada Gambar 6.4 tampak vektor-vektor translasi yang diwakili oleh ruas-ruas garis dengan anak panah yang besar dan arahnya sama. Translasi dengan vektor ini menyatakan bahwa setiap titik pada bidang ditranslasikan 2 satuan ke kanan dan 3 satuan ke atas yang ditulis $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Sehingga vektor translasi itu dituliskan dengan $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Misalnya, pada translasi $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ ini, titik A(1, 3) dipetakan ke titik $A^!(3, 6)$

Titik C(2, -2) dipetakan ke ttitik $C^!(4, 1)$. Dapat pula dikatakan peta (bayangan) dari titik D(-4, -4) adalah titik $D^!(-2, -1)$ dan bayangan titik E(-5, 2) adalah titik $E^!(-3, 5)$. Apakah Anda dapat menyimpulkan bahwa pada translasi $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ ini, titik P(x, y) dipetakan ke titik $P^!(x + 1, y + 3)$? Sehingga secara umum Anda dapat menyimpulkan bahwa translasi $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ memetakan titik Q(x, y) ke titik $Q^!(x + a, y + b)$.

Suatu vektor translasi, selain dinyatakan dengan dua huruf besar dengan anak panah diatasnya, dapat pula dinyatakan sebuah huruf kecil yang dibubuhi garis di bawahnya, seperti pada Gambar 6.5 di bawah ini.



Gambar 6.5

Contoh 6.1

Misalnya, pada Gamnar 6.5, vektor $\overrightarrow{PQ}$ dapat pula dinyatakan dengan $\underline{a}$ sehingga $\overrightarrow{PQ} = \underline{a}$. Dapatkah Anda menyatakan vektor-vektor translasi pada Gambar 6.5 itu dengan pasangan bilangan?

Jawab.

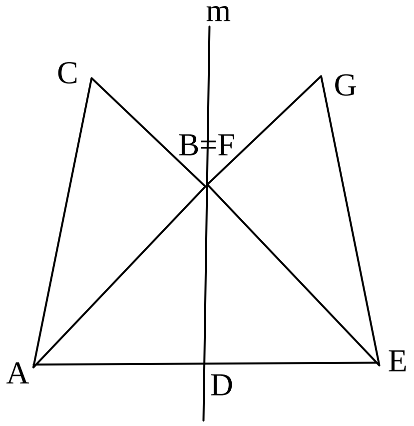
$\overrightarrow{PQ} = \underline{a} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\ \underline{b} = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix},\ \underline{c}=\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix},\ \underline{d}=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}, \underline{e}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}, \underline{u}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, dan\, \underline{v}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

Translasi dengan vektor $\underline{a} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ biasa disingkat translasi $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. Pada translasi $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ membawa titik (1, 1) ke titik (2, 4). Translasi $\underline{e} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ membawa titik (2, 4) ke titik (6, 2). Dua translasi tersebut membawa titik (1, 1) ke titik (6, 2) dan dituliskan dengan translasi $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$, yang membawa titik (1, 1) ke titik (6, 2). Bandingkan dengan translasi $\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ membawa titik (1, 1) ke titik (6, 2). Dari sini kita dapat menyimpulkan bahwa $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$

Catatan: Misalnya, translasi dengan vektor $\underline{a}$ membawa titik A(3, 2) ke B(5, 8) dapat ditulis dengan $\underline{Ta}$:A(3, 2) $\rightarrow$ B(5, 8).

2. *Refleksi (Pencerminan)*

Ketika kita sedang berkaca (bercermin) di belakang cermin tampak bayangan kita. Bayangan itu sama dengan kita baik bentuk maupun besarnya, perbedaannya terletak pada arahnya, yaitu berlawanan karena kita dan bayangan kita saling berhadapan.



Gambar 6. 6

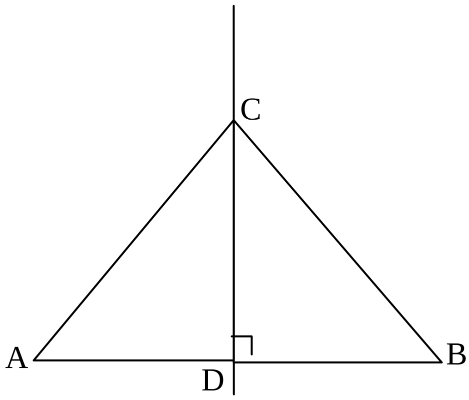
Perhatikan Gambar 6.6, garis m dipandang sebagai cermin. Oleh cermin m ini, bayangan dari Δ ABC adalah Δ EFG. Dalam matematika, kita boleh pula mengatakan bahwa oleh cermin m bayangan dari Δ EFG adalah Δ ABC. Apabila pencerminan (refleksi) diberi simbol M maka pencerminan oleh garis m ditulis M_m

Dengan pencerminan oleh garis m, bayangan Δ ABC adalah Δ EFG, ditulis dengan notasi M_m: Δ ABC = Δ EFG

Bangun (bentuk) dan besar benda dan bayangannya selalu sama sehingga benda dan bayangannya dikatakan sama dan sebangun (kongruen) yang diberi notasi "$\cong$".

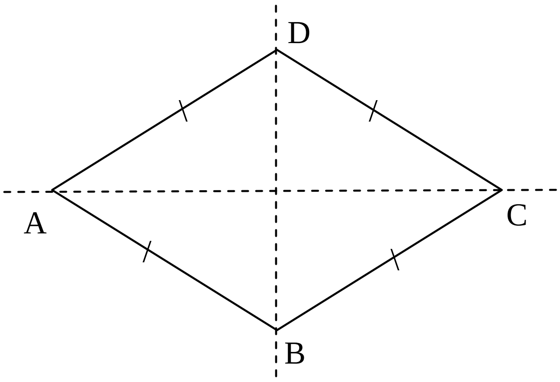
Pada pencerminan M_m (Gambar I.6), Δ ABC sama dan sebangun dengan Δ EFG (ditulis Δ ABC $\cong \Delta$ EFG). Bayangan titik B adalah titik F dan B = F. Suatu titik yang bayangannya titik itu sendiri disebut titik tetap *(invarian)*. Jadi, titik B tersebut adalah suatu titik invarian sehingga Anda akan mengerti bahwa semua titik pada cermin merupakan titik-titik invarian.

Jika titik A dan E dihubungkan, maka garis AE tegak lurus pada garis m (cermin). Tentukanlah bayangan garis AE terhadap cermin m!. Bayangan AD adalah ED dan bayangan ED adalah AD sehingga bayangan garis AE adalah garis EA. Padahal garis AE sam,a dengan garis EA maka mbayangan garis AE adalah garis itu sendiri. Selanjutnya dikatakan bahwa garis AE terhadap pencerminan dengan garis m merupakan garis tetap (garis invarian), tetapi *tidak titik pertitik.*



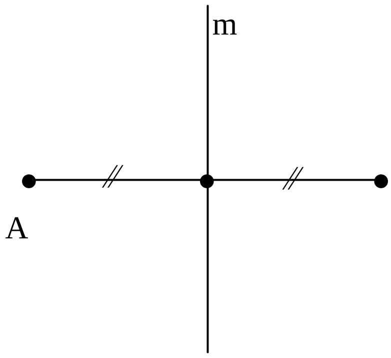
Gambar 6.7

Pada gambar 6.7 Δ ABC adalah suatu segitiga sama kaki. Apabila kertas yang memuat gambar Δ ABC ini dilipat menurut garis CD maka Δ ADC akan tepat menutup Δ BDC. Demikian pula jika garis CD dipandang sebagai cermin maka bayangan Δ ADC adalah Δ BCD dan sebaliknya bayangan Δ BDC adalah Δ ADC sehingga bayang Δ ABC adalah Δ BAC sendiri. Demikian pula jika Δ ABC digunting melalui sisi-sisinya dan selanjutnya potongan segitiga itu dibalik dengan diletakkannya A pada B, B pada A serta C tetap pada C maka potongan segitiga itu akan tepat menutup segitiga semula. Selanjutnya, dikatakan bahwa bangun Δ ABC sama kaki tersebut mempunyai simetri sumbu atau simetri cermin atau simetri balik atau simetri lipat, sedangkan garis yang dipandang sebagai cermin itu disebut garis simetri atau *sumbu simetri*.



Gambar 6.8

Pada gambar 6.8, segi empat ABCD adalah suatu belah ketupat. Anda dapat melipat atau membalik bangun tersebut menurut diagonalnya dan menunjukkan bahwa belah ketupat mempunyai simetri cermin. Tepatnya dikatakan bahwa suatu belah ketupat mempunyai dua sumbu simetri.



Gambar 6.9

Perhatikan gambar 6.9, pada pencerminan terhadap garis m, bayangan A adalah A' dan bayangan A' adalah A, atau ditulis M_m: AA'. Selanjutnya, dapat dimengerti bahwa panjang AD = A'D dan garis AA' tegak lurus pada garis m.

Contoh 6.2

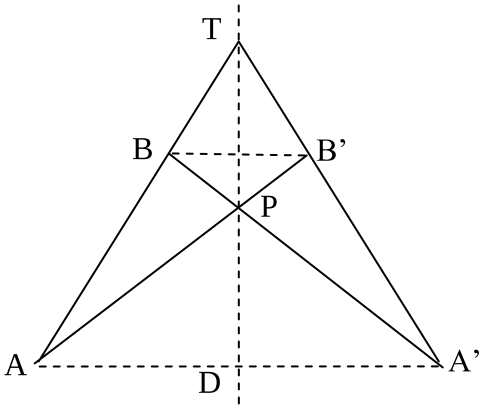
Titik-titik A dan B terletak pada pihak yang sama terhadap garis m sedemikian hingga perpanjangan AB memotong garis m dititik T dan sudut yang dibentuk oleh garis AB dan garis m besarnya 35^0.

A'B' adalah bayangan dari AB oleh pencerminan terhadap garis m.

1. Jika AB = 7 cm dan BT = 3 cm, berapakah panjang A'T dan besar $\angle$ ATA'?

2. Jika garis yang menghubungkan A dan B' memotong garis m dititik P, mengapa garis hubung dititik- titik A' dan B memotong garis m dititik P pula! Jelaskan.

Jawab:



Gambar 6.10

1. M_m : AB $\rightarrow$ A'B' maka A'B' = AB sehingga A'B' = 7 cm.

   M_m : BT $\rightarrow$ B'T maka B'T = BT sehingga B'T = 3 cm.

   Jadi, A'T = A'B' + B'T = 7 cm + 3 cm

   A'T = 10 cm.

   M_m : AT $\rightarrow$ A'T maka $\angle$ATD = $\angle$A'TD = 35^0.

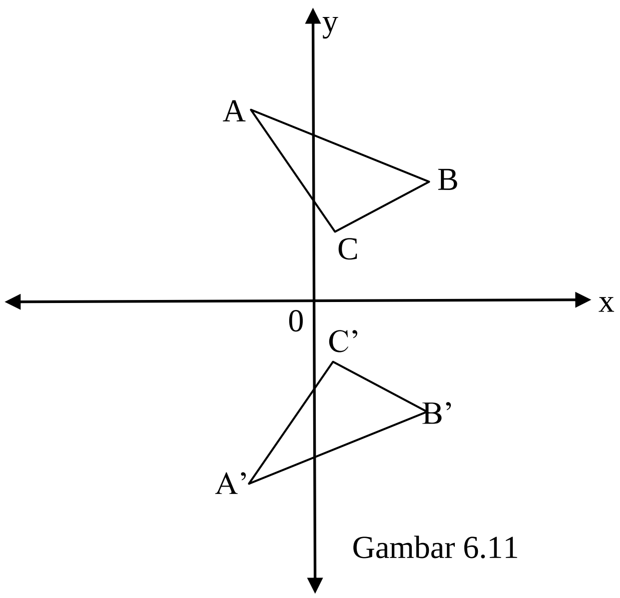
   Jadi, $\angle$ATA' = $\angle$ATD + $\angle$A'TD = $35^0 + 35^0 = 70^0$.

2. AB' memotong garis m dititik P.

   M_m : AP $\rightarrow$ A'P

   M_m : PB $\rightarrow$ PB

   M_m = AB' $\rightarrow$ A'B. Karena A'B adalah bayangan dari AB' maka A'B dan AB' berpotongan pada suatu titik yang terletak pada cermin (garis m), yaitu titik P.



Gambar 6.11

Dalam bidang koordinat Cartesius, pencerminan terhadap sumbu x ditulis M_x, pencerminan terhadap sumbu y ditulis: M_y.

Perhatikan Gambar 6.11

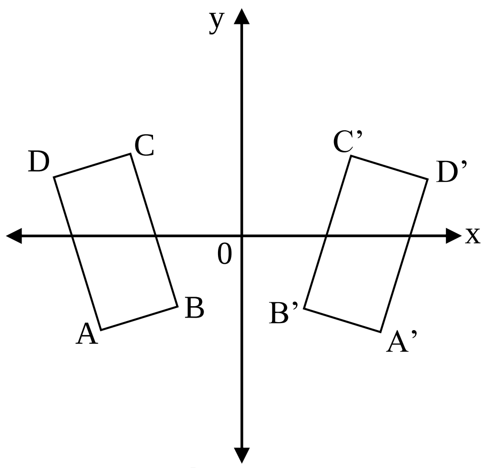
M_x : A (-2,3) $\rightarrow$ A'(-2,-3)

M_x : B (4,2) $\rightarrow$ B' (4,-2)

M_x : C (1,1) $\rightarrow$ C (1,-1)

M_x : ΔABC $\rightarrow$ A'B'C'

Dari contoh ini kita dapat menarik simpulan bahwa M_x : P (a,b) $\rightarrow$ P'(a,-b) jadi, pada pencerminan terhadap sumbu x, bayangan titik P(a,b) adalah P'(a,-b)



Gambar 6. 12

Pada gambar 6.12 bayangan jajar genjang ABCD oleh pencerminan terhadap sumbu y adalah jajar genjang A'B'C'D' atau ditulis:

M_y : ABCD $\rightarrow$ A'B'C'D'

Bayangan titik-titik sudutnya adalah sebagai berikut:

M_y : A(-4,-3) $\rightarrow$ A'(4,-3)

B(-1,-2) $\rightarrow$ B'(1,-2)

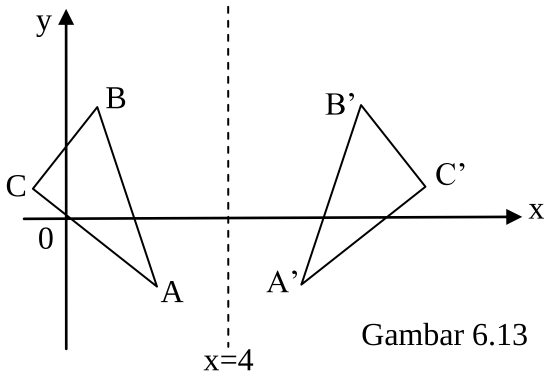
C(-2,2) $\rightarrow$ C'(2,2)

D(-5,1) $\rightarrow$ D'(5,1)

Memperhatikan koordinat suatu titik dan koordinat bayangannya, kita dapat menarik suatu simpulan bahwa:

M_y : P(a, b) $\rightarrow$ p'(-a, b)

Jadi, pada pencerminan terhadap sumbu y, bayangan titik P(a, b) adalah P'(-a, b).



Gambar 6.13

Pada Gambar 6.13, garis x = 4 sebagai cermin maka bayangannya,

$M_{x=4}$: ΔABC → ΔA'B'C'

Akan kita tentukan hubungan koordinat suatu titik dengan koordinat bayangannya.

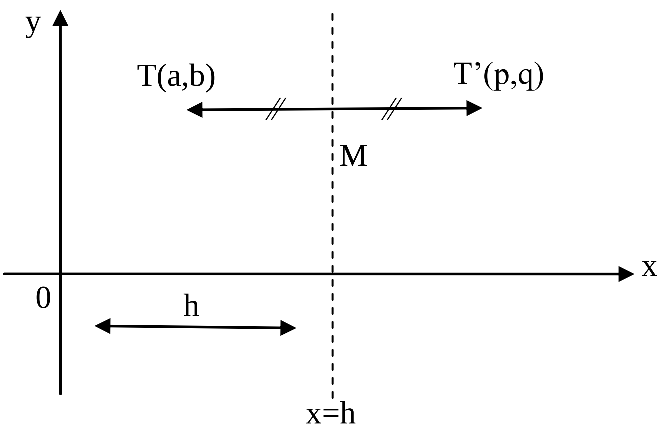
$M_{x=4}$: ΔABC → ΔA'B'C'

B(2, 2) → B'(6, 2)

C(-1, 3) → C'(9, 3)

P(a, b) → P'(. . ., b)

Dapatkah Anda melengkapi koordinat titik P' dengan memperhatikan contoh-contoh di atasnya?



Gambar 6.14

Perhatikan Gambar 6.14. Garis lurus x = h sebagai cermin dan bayangan ttitik T(a,b) adalah T'(p,q). Kita akan menentukan hubungan koordinat titik T' dengan koordinat titik T, yaitu menyatakan p dan q dengan a, b dan h.

p = a + TT'

= a + 2 TM

= a + 2(h – a)

= a + 2h – 2a

$p = 2h - a$

Selanjutnya, tampak jelas bahwa $q = b$

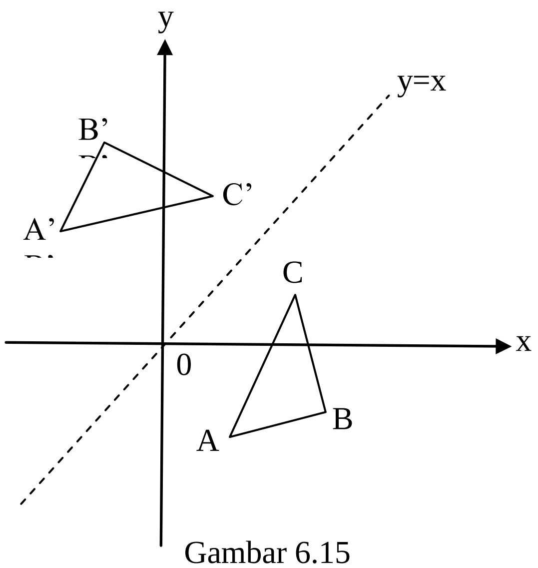
Maka, bayangan titik (a, b) pada pencerminan terhadap garis x = h adalah T'(2h-a, b).

$M_{x=h}$: T(a, b) $\rightarrow$ T'(2h-a, b)

Dengan cara yang mirip dengan cara tersebut, Anda dapat menentukan bayangan titik P(a, b) pada pencerminan terhadap garis y = k

$M_{y=k}$: P(a, b) $\rightarrow$ P'(a, 2k-b)

Bayangan titik P(a, b) pada pencerminan terhadap garis y = k adalah P'(a, 2k-b)



Gambar 6.15

Pada Gambar 6.15, garis lurus y = x sebagai cermin. Pada pencerminan ini, bayangan (peta) dari ΔABC adalah ΔA'B'C'

$M_{y=x}$: ΔABC → ΔA'B'C'

Bayangan titik-tik sudutnya yang menyertakan koordinatnya sebagai berikut.

$M_{y\,=\,x}$: A(2, -3) $\rightarrow$ A'(-3, 2)

B(5, -2) $\rightarrow$ B'(-2, 5)

C(3, 1) $\rightarrow$ C'(1, 3)

Memperhatikan kooedinat suatu titik dan koordinat titik bayangannya, kita dapat menarik simpulan sebagai berikut.

$M_{y\,=\,x}$: P(a, b) $\rightarrow$ P'(b, a)

Pada pencerminan terhadap garis y = x, bayangan dari titik P(a, b) adalah P'(b, a)

Pada Gamar 6.16, garis lurus y = -x sebagai cermin

$M_{y\,=\,-x}$: ΔABC $\rightarrow$ ΔA'B'C'

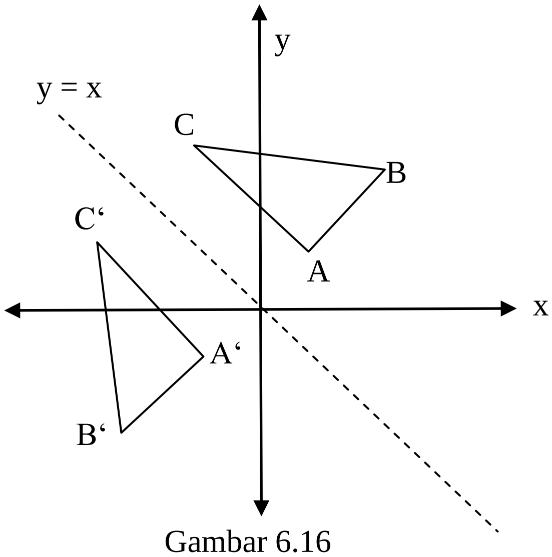
A(2, 1) $\rightarrow$ A'(-1, -2)

B(4, 3) $\rightarrow$ B'(-3, -4)

C(-2, 4) $\rightarrow$ C'(-4, 2)

Dari contoh ini, kita dapat menarik simpulan sebagai berikut.

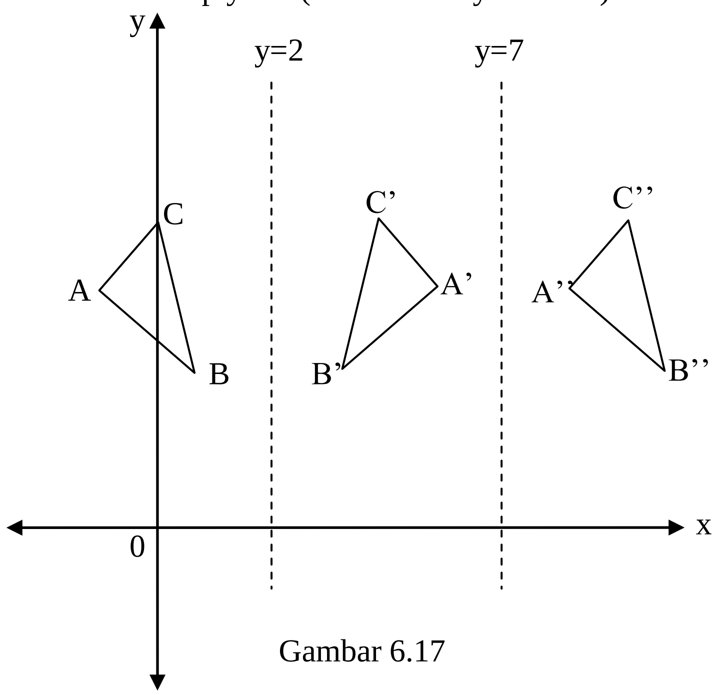
$M_{y=-x}$: P(a, b) $\rightarrow$ P'(b, a)



Gambar 6.16

Pada Gambar 6.17, terdapat dua cermin, yaitu y = 2 dan garis y = 7 yang sejajar. Pada pencerminan terhadap garis y = 2, bayangan (peta) dari ΔABC adalah ΔA'B'C'. Selanjutnya, pada pencerminan terhadap garis y = 7, peta (bayangan) dari ΔA'B'C' adalah ΔA''B''C''. Dua pencerminan berurutan ini disebut komposisi pencerminan.

$M_{y=7}$:o$M_{y=2}$ dibaca pencerminan terhadap garis y = 2 diteruskan dengan pencerminan terhadap y = 7 (Pembacaannya dibalik)



Gambar 6.17

Komposisi pencerminan pada Gambar 6.17 dapat dituliskan;

$M_{y=7} o M_{y=2}$: $\Delta ABC \rightarrow \Delta A'B'C'$.

Komposisi pencerminan $M_{y=2}$ dan $M_{y=7}$ memetakan ΔABC ke $\Delta A''B''C''$.

Perhatikan Gambar 11.25.

$M_{y=2}$: $A(-2, 3) \rightarrow A'(6,3)$

$B(1,2) \rightarrow B'(3,1)$

$C(0, 5) \rightarrow C'(4, 5)$

$M_{y=7}$: $A'(6, 3) \rightarrow A''(8,3)$

$B'(3, 1) \rightarrow B''(11, 1)$

$C'(4,5) \rightarrow C''(10, 5)$

$M_{y=7}$: $A(-2, 3) \rightarrow A''(8, 3)$

$B(1, 1) \rightarrow B''(11, 1)$

$C(0, 5) \rightarrow C''(10, 5)$

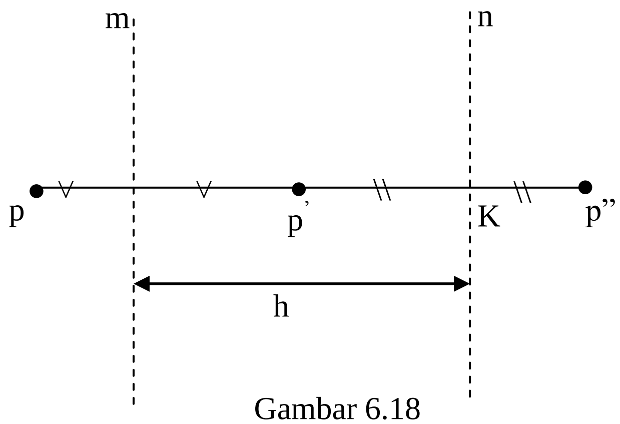
Apabila kita perhatikan lagi Gambar 6.17 maka $\Delta A''B''C''$ diperoleh dari ΔABC dengan cara melakukan translasi (pergeseran) dengan;

Vector u = $\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ yaitu $\underline{Tu}$

$\underline{Tu}$ = $A(-2, 3) \rightarrow A''(-2+ 10, 3 + 0) = A''(8, 3)$

$B(1, 1) \rightarrow B''(1 + 10, 1 +0) = B''(11, 1)$

$C(0, 5) \rightarrow C''(0 + 10, 5 + 0) = C''(10, 5)$



Gambar 6.18

Selanjutnya kita mencari vector translasi pada pencerminan denganh dua cermin yang sejajar. Pada Gambar 6.18 garis-garis m dan n sebagai cermin.

$M_m : P \rightarrow P'$ dan $M_n : P' \rightarrow P''$, $\quad M_0 : P \rightarrow P''$

Misalkan, jarak cermin m dan n adalah h. Telah diketahui bahwa $M_n o M_m$ sama dengan suatu translasi $\underline{u}$ yang arahnya tegak lurus pada cermin.

Translasi $\underline{u}$ = PP'' (lihat Gambar 6.18)

$PP'' = PP' + P'P''$

$= 2\ TP' + 2\ P'K$

$= 2\ (TP' + P'K)$

$PP'' = 2\ h$

Jadi, panjang vector translasi $\underline{u}$ sama dengan dua kali jarak kedua cermin.

Dari uraian di atas dapat disimpulkan sebagai berikut.

Jika dua cermin sejajar m dan n yang jaraknya h maka pencerminan terhadap garis m dilanjutkan dengan perncerminan terhadap garis n sama dengan melakukan pergeseran (translasi) dengan vector $\underline{u}$ yang panjangnya 2 h dan arahnya tegak lurus pada cermin.

Contoh 6.3

Diketahui A(3, -2), B(11, 5), dan C(-5, 2). Titik-titik ini dicerminkan terhadap garis x = -1, dan hasil pencerminan ini dicerminkan lagi terhadap garis x = 5. Tentukan bayangan terakhir dari titik-titik A, B, dan C tersebut!.

Jawabh

$M_{x=5}oM_{x=-1}$ = translasi $\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ karena jarak cermin x = 5 dan x = -1 adalah 6, sehingga;

$M_{x=5}$ $M_{x=-1}$: $A(3, 2) \rightarrow A''(3 + 12, -2) = A''(15, -2)$

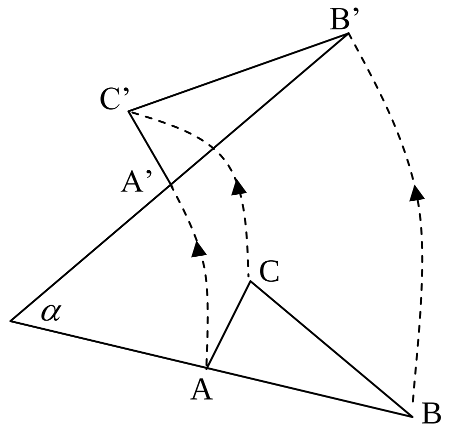
$B(1, 5) \rightarrow B''(1 + 12, 5) = B''(13, 5)$

$C(-5, 2) \rightarrow C''(-5 + 12, 2) = C''(7, 2)$.

B. Rotasi dan Dilatasi

1. Rotasi (Perputaran)

Pada Gambar 6.19 tampak bahwa Δ ABC diputar dengan pusat 0 sejauh α^0 menjadi Δ A'B'C'. Atau dapat dikatakan, pada rotasi dengan pusat 0 sudut putar α^0 membawa Δ ABC ke Δ A'B'C'. Rotasi dengan pusat 0 dan sudut putar α^0 ditulis dengan rotasi R(0, α^0). R(0, α^0) : Δ ABC dibaca: rotasi dengan pusat 0 dan sudut putar α^0, memetakan (membawa) Δ ABC ke Δ A'B'C'. Dalam hal ini Δ A'B'C' disebut peta/bayangan dari Δ ABC oleh R(0, α^0)

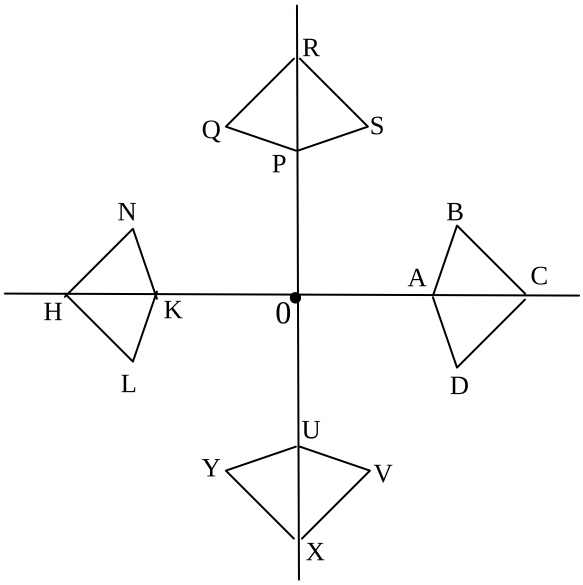


Gambar 6.19

Pada Gambar 6.19 tampak bahwa tanda anak panah yang menyatakan arah perputaran. Arah perputaran ditunjukkan oleh besarnya sudut putar α. Jika besarnya sudut putar positif maka arah perputarannya positif pula, yaitu berlawanan arah jarum jam. Jika besarnya sudut putar negatif maka arah pderputarannya negatif, yaitu searah jarum jam. Misalnya, R(0, 30^0) adalah suatu rotasi dengan pusat 0 dan sudut putar 30^0 dengan arah positif, R(0, -45^0) adalah suatu rotasi dengan pusat 0 dan sudut putar 45^0 dengan arah negatif.

Pada Gambar J.1, R(0, α^0): ΔABC $\rightarrow \Delta$A'B'C' maka:

1. $\angle$ AOA' = $\angle$ BOB' = $\angle$ COC' = α^0 ;
2. ΔA'B'C' kongruen dengan ΔABC;
3. Mempunyai tepat satu titik inarian (tatap), yang pusat perputaran 0



Gambar 6.20

Contoh 6.4

Pada Gambar 6.20, tentukanlah bayangan dari ΔABC berturut-turut oleh R(0, 90^0), R(0, -90^0), R(0, 180^0), R(0, -180^0), dan R(0, 270^0). Tentukan pula bayangan dari titik V oleh rotasi-rotasi tersebut.

Jawab:

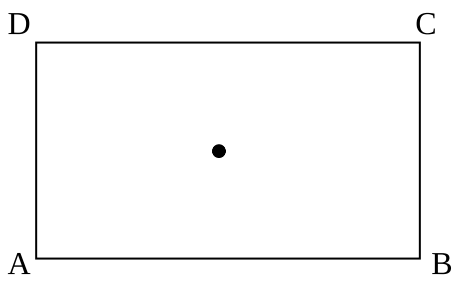
R(0, 90^0): ΔABC $\rightarrow$ ΔPQR dan V $\rightarrow$B

R(0, -90^0): ΔABC $\rightarrow$ ΔUVX dan V $\rightarrow$L

R(0, 180^0): ΔABC $\rightarrow$ ΔKLM dan V $\rightarrow$Q

R(0, -180^0): ΔABC $\rightarrow$ ΔKLM dan V $\rightarrow$Q

R(0, 270^0): ΔABC $\rightarrow$ ΔUYX dan V $\rightarrow$L



Gambar 6.21

Gambar 6.21 adalah gambar suatu persegi panjang dan 0 adalah titik pusat persegi panjang (titik potong kedua diagonalnya).

R(0, 180^0) : A $\rightarrow$ C; B $\rightarrow$ D; C $\rightarrow$ A; D $\rightarrow$ B

Jadi R(0, 180^0) : ABCD $\rightarrow$ CDAB

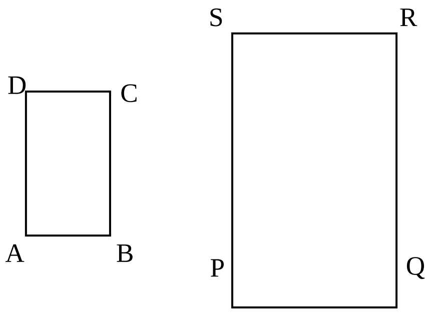
Sehingga bayangan dari persegi panjang ABCD oleh rotasi setengah putaran (sejauh 180^0) dengan pusat 0 tetap merupakan bangun persegi panjang itu pula.

Sedangkan R(0, 360^0) : ABCD $\rightarrow$ ABCD

Demikian sehingga jelas bahwa bayangan dari persegi panjang ABCD oleh rotasi satu putaran dengan pusat 0 adalah persegi panjang itu sendiri. Dalam satu putaran itu persegi panjang menempati bingkai (tempat semula) sebaanyak 2 kali, yaitu pada rotasi setengah putaran (180^0) dan pada rotasi satu putaran (360^0). Selanjutnya dikatakan bahwa persegi panjang mempunyai simetri putar tingkat 2.

2. Dilatasi (Perbanyakan)

,



Gambar 6.22

Pada Gambar 6.22 tampak dua persegi pajang ABCD dan PQRS. Kita mudah melihat perbandingan panjang sisi-sisi persegi panjang ABCD dengan sisi-sisi panjang PQRS.

AD : PS = 3 : 6 = 1 : 2

AB : PQ = 2 : 4 = 1 : 2

Boleh juga ditulis PS : AD = PQ : AB = 2 : 1

Atau $\frac{PS}{AD} = \frac{PQ}{AB} = \frac{2}{1} = 2$

Tarik garis yang menghubungkan titik P dan A dan perpanjang, apakah melalui titik 0? Ya!. Tarik pula garis yang menghubungkan titik-titik Q dan B dan perpanjang, apakah melalui titik 0? Ya!.

Demikian pula untuk titik-titik S dan D dan titik-titik R dan S, masing-masing garis hubung titik-titik itu melalui titik 0. Tentukan perbandingan OP :OA, OQ :OB, OR : OC, dan OS : OD!. Perbandingan ini selalu sama dengan 2 : 1.

Jadi, $\frac{OP}{OA} = \frac{OQ}{OB} = \frac{OR}{OC} = \frac{OS}{OD} = \frac{2}{1} = 2$

Ternyata nilai perbandingan ini sama dengan nilai perbandingan panjang sisi persegi panjang PQRS dan sisi persegi panjang ABCD, yaitu sama dengan 2.

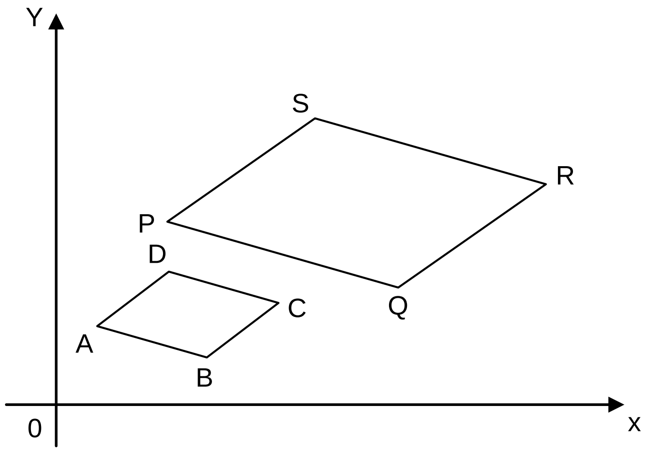
Jika diketahui letak titik 0 dan persegi panjang ABCD serta nilai perbandingan itu maka kita dapat menentukan persegi panjang PQRS. Pekerjaan menentukan persegi panjang PQRS, jika diketahui sebuah titik tetap O, persegi panjang ABCD dan nilai perbandingan itu disebut melakukan dilatasi (perbanyakan). Selanjutnya titik tetap O disebut pusat dilatasi, dan nilai perbandingan itu disebut faktor skala (perbanyakan). Dilatasi dengan pusat O dan faktor skL 2 ditulis [0, 2] sehingga dilatasi yang tampak pada Gambar K.1 itu dapat dinyatakan dengan notasi sebagai berikut:

[0, 2] : $\square$ ABCD $\rightarrow$ $\square$PQRS

(dibaca: dilatasi dengan pusat O dan faktor skala 2 membawa persegi panjang ABCD ke persegi panjang PQRS).

Dilatasi [0, 2] disebut perbesaran, sedangkan dilatasi [0, 1/2] disebut pengecilan.

Berikut ini akan kita pelajari dilatasi pada bidang koordinat Cartesius.



Gambar 6.23

Pada Gambar 6.23 tampak suatu dilatasi dengan pusat 0 dan faktor skala 2 yang memetakan jajaran genjang ABCD ke jajaran ngenjang PQRS.

[0, 2] : $\square$ ABCD $\mapsto$ $\square$PQRS dengan A(1, 2) $\mapsto$ P(2, 4)

B(4, 1) $\mapsto$ Q(8, 2)

C(6, 2) $\mapsto$ R(12, 4)

D(3, 3) $\mapsto$ S(6, 6)

Bila diperhatikan koordinat titik bayangan dengan titik semula terdapat hubungan, yaitu koordinat titik bayangannya sama dengan 2 kali koordinat semula. Sehingga apabila suatu dilatasi dengan pusat 0 mdengan faktor skala k akan memetakan titik P(a, b) ke titik P'(ka, kb).

[0, k] : P(a, b) $\mapsto$ P'(ka, kb)

Jika pada rumus ini k =1 maka kita akan memperoleh bahwa:

$[0, 1] : P(a, b) \mapsto P'(a, b)$

Oleh karena koordinat titik P sama dengan koordinat titik P' berarti P dan P' berimpit. Jadi, dilatasi [0, 1] tidak mengubah suatu bangun (bangun tersebut tetap) dilatasi seperti ini disebut *transformasi identitas.*

Berikut disajikan suatu dilatasi dengan titik sebarang. Titik P(2, 3) sebagai pusat dilatasi dan faktor skalanya 3. Dilatasi ini membawa titik A(4, 4) ke A'(8,6). Tentukanlah bayangan titik Q(-18, 23) oleh dilatasi [P, 3] ini!. Tentu kita mengalami kesulitan untuk menggambarnya.

Suatu cara untuk memudahkan kita menentukan banyangan suatu titik oleh dilatasi dengan pusat 0 maka titik pusat dilatasi P harus digeser ke titik 0 dengan suatu translasi $\overline{PO} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Demikian pula titik A(4,4) harus diumalasi dengan vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ menjadi A_1(4-2, 4-3), yaitu A_1(2, 1). Sekarang kita mencari hasil dari A3 ini oleh dilatasi dengan pusat 0 dan faktor skL 3, yaitu A_2(6, 3). Selanjutnya pusat dilatasi 0 dikembalikan nke P dengan translasi $\overline{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, demikian pula A_2(6, 3) dilakukan taranslasi $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ menjadi A'(6+2, 3+3), yaitu A'(8, 6).

Proses ini dapat dinyatakan dengan urutan sebagai berikut.

1. Translasikan P ke O dengan $\overline{PO} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, yang berakibat pada translasinya A(4, 4) dengan $\overline{PO} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Diperoleh A_1(4-2, 4-3) = A_1(2, 1).
2. Dilatasi $[0, 3] : A_1(2, 1) \mapsto A_2(3x2, 3x1) = A_2(6, 3)$
3. Translasikan O ke P dengan $\overline{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, yang berakbat ditaranslasikannya A_2((6, 3) dengan $\overline{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, diperoleh A'(6+2, 3+3) = A'(8, 6).

Dengan cara ini (tanpa menggambar) dapat dicari bayangan titik Q(-18, 23) oloeh dilatasi [P, 3].

1. Translasikan Q(-18, 23) dengan $\overline{PO} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, diperoleh Q_1(-18-2, 23-3) = Q_1(-20, 20)

2. Dilatasi [0, 3] : $Q_1(-20, 20) \mapsto Q_2(-60, 60)$
3. Translasikan $Q_2(-60, 60)$ dengan $\overline{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, diperoleh Q'(-60+2, 60+3) = Q'(-58, 63).

Secara umum hal tersebut dapat dirumuskan secara singkat sebagai berikut. Suatu dilatasi dengan pusat P(a, b) dan vektor skala k akan membawa titik A(u, v) ke titik A'(u', v') dengan u'= k(u-a) + a dan v' = k(v-b) + b

Contoh 6.5

Tentukan bayangan titik-titik A(3, -2) dan B(-5, 1) pada dilatasi dengan pusat P(4,2) dan faktor skala 6.

Jawab

Jika [P,6] : A(3, -2) $\mapsto$ A'(x, y) maka

x = 6(3-4) + 4 = -2

y = 6(-2-2) + 2 = -22

Jadi, A'(-2, -22)

Jika [P,6] : B(-5, 1) $\mapsto$ B'(x, y) maka

x = 6(-5 – 4) + 4 = -50

y = 6(1 - 2) + 2 = -4

Jadi B'(-50, -4)

RANGKUMAN

1. Translasi (pergeseran): Suatu translasi (pergeseran) tertentu oleh jarak dan arahnya. Jarak dan arah ini dinyatakan oleh suatu ruas garis berarah yang disebut vector. Sehingga suatu translasi dinyatakan dengan vector. Suatu translasi dengan vector u dinyatakan Tu. Suatu translasi menggerakkan semua titik dalam bidang sehingga semua titik tersebut bergerak sepanjang jarak yang sama dan arah yang sama pula. Bayangan suatu bangun aokann kongruen dangan bangun semula sehingga luas dan besarnya tetap sama dengan bangun semuala.
2. Refleksi (pencerminan): Jika pada pencerminan terhadap suatu garis, bayangan suatu bangun sama (berimpit) dengan bangun itu sendiri maka garis itu disebut sumbu simetri. Dan dikatakan bahwa bangun itu mempunyai simetri sumbu atau simetri cermin. Suatu bangun ada yang mempunyai dua sumbu simetri atau lebih. Misalnya, persegi panjang mempunyai 2 sumbu simetri, segitiga sama sisi mempunyai 3 sumbu simetri, persegi mempunyai 4 sumbu simetri. Pada pencerminan terhadap garis m jika bayangan titik A adalah A' maka dituliskan dengan notasi M_m : A $\rightarrow$ A'

Jika M_m : A $\rightarrow$ A' dan B $\rightarrow$ B' maka AA' sejajar dengan BB'. AA', dan BB' masing-masing dipotong oleh garis m menjadi dua ruas garis yang sama panjangnya. AB' dan A'B berpotongan pada suatu titik yang terletak pada garis m, demikian pula garis AB dan A'B' (kecuali jika AB//A'B').

3. R(0, α^0) adalah rotasi dengan titik pusat 0 dengan sudut putar α^0. Jika α^0 positif, perputaran berlawanan arah dengan arah jarum jam dan jika α^0 negatif, perputarannya searah dengan arah jarum jam.
4. [0,k] adalah suatu dolatasi dengan titik pusat 0 dengan factor skala k.
5. [0,k] : P(a, b) $\mapsto$ P'(ka, kb)

LATIHAN

1. Translasi $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dilanjutkan dengan translasi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ menghasilkan suatu translasi $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

   Tentukanlah a dan b.
2. Diketahui titik A(-7, -4), B(1, -5), dan C(-2, 1). Titik-titik ini dicerminkan terhadap garis y = 2 dan peta-petanya dicerminkan lagi terhadap garis y = 7. Tentukanlah bayangan terakhir dari titik-titik A, B, dan C tersebut!.
3. Diketahui ΔABC yang koordinat titik-titik sudutnya A(15, 11), B(-3, 12), dan C(-5, 6). Tentukianlah bayangan ΔABC pada rotasi berrikut ini!

   a. R(0, 90^0) b. R(0, 180^0) c. R(0, -90)
4. Diketahui titik-titik A(11, 6), B(9,6), P(17, 9), dan Q(21, 9). Tentukanlah titik pusat dilatasi dan faktor skalanya, mapabila bayangan A dan B berturut-turut adalah P dan Q

DAFTAR PUSTAKA

Burger, William F. and Musser, Gary L. 1991. *Mathematics for Elementary for Teacher*. Ontario Macmillan.

Harfield, Marry M; Nancy Tanner and Bitter, Gary G. 1993. *Mathematics Methods for Elementary and Middle School*. Boston: Allyn and Bacon

Graham, Malcolm. 1975. *Elementary Mtahematics. Second Edition*. New York: Harcourt Brace Jovanovich, Inc.

Sukirman.,dkk. 2007. *Matematika*. Jakarta: Universitas Terbuka

Muhsetyo G. 2007. *Pembelajaran Matematikan SD*. Jakarta: Universitas Terbuka

BILANGAN BERPANGKAT

Drs. Zaainuddin, M.Pd

Kegiatan belajar mengajar 7 ini merupakan kegiatan belajar mengajar terakhir dari matakuliah Matematika Dasar. Cakupan dari kegiatan belajar mengajar ini membahas pokok bahasan tentang bilangan berpangkat dan operasinya. Pokok bahasan ini meliputi sub-sub pokok bahasan, yaitu pembelajaran, pangkat nol dan pangkat negative, formulasi bilangan berpangkat, Pembagian bilangan berpangkat dengan bilangan pokok tetap dan perpangkatan bilangan berpangkat, pangkat dari perkalian dan pembagian suatu bilangan, dan pangkat bilangan pecah

Indikator yang diharapkan diacapai mahasiswa setelah mempelajari kegiatan belajar mengajar 7 ini adalah mahasiswa terampil;

1. menjelaskan bilangan berpangkat;
2. menjelaskan operasi bilangan berpangkat;
3. menyelesaikan soal-soal yang terkait dengan bilangan berpangkat;
4. menunjukkan kesulitan-kesulitan siswa yang terpola dan memecahkan permasalahannya.

Agar mahasiswa dapat menguasai kegiatan belajar mengajar 2 ini, maka baca dan pelajari secermat mungkin, baik pokok bahasan maupun sub-sub pokok bahasan yang disajikan berikut.

BILANGAN BERPANGKAT

Bilangan berpangkat, misalnya 6^3, $(-7)^5$, $(\frac{1}{5})^8$, dan seterusnya. Lambang bilangan 3, 5, dan 8 yang ditulis di atas dinamakan *pangkat* dan angka-angka 6, -7, dan $\frac{1}{5}$ disebut *bilangan pokok*, sedangkan makna dari 6^3, $(-7)^5$, $(\frac{1}{5})^8$ berturut-turut

$$\underbrace{6\,x\,6}_{2\ faktor}\ ; \qquad \underbrace{(-7)\,x\,(-7)\,x\,(-7)\,x\,(-7)\,x\,(-7)}_{5\ faktor}\ ;\ \text{dan}\ \underbrace{\frac{1}{5}\,x\,\frac{1}{5}\,x\,\frac{1}{5}\,x\,\frac{1}{5}\,x\,\frac{1}{5}\,x\,\frac{1}{5}\,x\,\frac{1}{5}\,x\,\frac{1}{5}}_{8\ faktor}$$

Perhatikan table 7.1 berikut.

Tabel 7.1

Bentuk Bilangan Berpangkat	Dibaca	Faktor	Nilai
6^2	6 pangkat dua	$\underbrace{6\,x\,6}_{2\ faktor}$	36
$(-7)^5$	Negative 7 pangkat 5	$\underbrace{(-7)\,x\,(-7)\,x\left(-7\right)x\,(-7)\,x\,(-7)}_{5\ faktor}$	-16807
$(\frac{1}{5})^8$	$\frac{1}{5}$ pangkat delapan	$\underbrace{\frac{1}{5}\,x\,\frac{1}{5}\,x\,\frac{1}{5}\,x\,\frac{1}{5}\,x\,\frac{1}{5}\,x\,\frac{1}{5}\,x\,\frac{1}{5}\,x\,\frac{1}{5}}_{8\ faktor}$	$\frac{1}{390625}$
a^n	a pangkat n	$\underbrace{a\,x\,a\,x\,a\,x\,\ldots\,x\,a}_{n\ faktor}$	a^n

A. Pembelajaran

Pada pembelajaran bilangan berpangkat guru dapat menggunakan metode Tanya jawab, metode penemuan, metode induksi, dan sebagainya. Sedangkan sajian di atas menggunakan metode penemuan.

Sekarang pada paparan penanaman konsep bilangan berpangkat dengan strategi tanya jawab kepada peserta didik, sebagai berikut;

- Apakah arti a^1?
- Apakah arti a^2?
- Apakah arti a^3?
- Apakah arti a^4?

Hal di atas disusun dalam table 7.2 berikut.

Tabel 7.2

Bentuk Bilangan Berpangkat	Dibaca	Faktor	Nilai
a^1	a pangkat satu	$\underbrace{a}_{1\ faktor}$	a^1
a^2	a pangkat dua	$\underbrace{a\ x\ a}_{2\ faktor}$	a^2
	x		
a^3	a pangkat tiga	$\underbrace{a\ x\ a\ x\ a}_{3\ faktor}$	a^3
a^4	a pangkat empat	$\underbrace{a\ x\ a\ x\ a\ x\ a}_{4\ faktor}$	a^4
…	…	…	a^n

Dari paparan di atas, bilangan berpangkat dapat kita definisikan sebagai berikut.

Definisi 7.1

Jika *a* sebarang bilangan real dan n sebarang bilangan asli.

$$\boxed{a^n = \underbrace{a.a.a.\ \ldots,a}_{n\ faktor}}$$

a disebut *bilangan pokok* dan *n* dinamakan *pangkat.*

B. Pangkat Nol dan Negatif.

Dari definisi 7.1 di atas, kita dapat menggunakan dan mengisi tempat yang kosong pada kolom yang kosong dalam table di bawah ini sebagai pola observasi.

Tabel 7.3

Bentuk Bilangan Berpangkat	Nilai
3^4	$81 = 3^{\cdots}$
$3^{\cdots}$	$27 = 3^{\cdots}$
. . .	$9 = 3^{\cdots}$
3^1	… = …
3^0	… = …
3^{-1}	$\frac{1}{3} = \frac{1}{3^1}$
. . .	$\frac{1}{9} = \ldots$
. . .	$\frac{1}{27} = \ldots$
. . .	… = …
3^{-5}	$\ldots = \frac{1}{3^5}$
$a^{\cdots}$	$\frac{1}{a^{\cdots}}$

Tabel 7.4

Bentuk Bilangan Berpangkat	Nilai
10^4	$\ldots = 10^{\cdots}$
10^3	$\ldots = 10^{\cdots}$
. . .	$100 = 10^{\cdots}$
. . .	10 = …
10^0	1 = …
10^{-1}	… = …
. . .	$\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$
. . .	$\frac{1}{1000} = \ldots$
. . .	… = …
. . .	$\frac{1}{100000} = \frac{1}{10^5}$
$a^{\cdots}$	$\frac{1}{a^{\cdots}}$

Isilah titik-titik yang kosong dan perhatikan pangkat-pangkat bilangan itu, mulai dari baris pertama sampai dengan baris terakhir. Pada Tabel 7.3 dan Tabel 7.4 pangkat dari bilangan-bi;angan itu dari atas ke bawah turun satu-satu. Nilai-nilai pada Tbel 7.3 turun dengan kelipatan $\frac{1}{3}$ dan nilai-nilai pada Tabelm7.4 turun dengan kelipatan $\frac{1}{10}$ dari baris di atasnya.

Setelah Anda isi titik-titik kosong pada Tabel 7.3 dan Tabelm7.4 cocokkan dengan tampilan berikut.

$3^4 = 81 = 3^4$	$10^4 = 10000 = 10^4$
$3^3 = 27 = 3^3$	$10^3 = 1000 = 10^3$
$3^2 = 9 = 3^2$	$10^2 = 100 = 10^2$
$3^1 = 3 = 3^1$	$10^1 = 10 = 10^1$
$3^0 = 1 = 3^0$	$10^0 = 1 = 10^0$
$3^{-1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3^1}$	$10^{-1} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1}$
$3^{-2} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$	$10^{-2} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$
$3^{-3} = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$	$10^{-3} = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$
$3^{-4} = \frac{1}{81} = \frac{1}{3^4}$	$10^{-4} = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4}$
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -	- -

$a^{-n} \quad = \quad \dfrac{1}{a^n} \qquad\qquad a^{-n} \quad = \quad \dfrac{1}{a^n}$

Dari pola di atas dapat kita definisikan.

Definisin7.2

Jika a ≠ 0 dan *n* bilangan bulat positif, maka $\boxed{a^0 = 1 \text{ dan } a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$

Contoh7.1 .Hitunglah:

1. a) $2^0 = 1$ b) $2^{-4} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$

2. a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^1} = \dfrac{3}{2}$ b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^4} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = \dfrac{81}{16}$

C. Formulasi Bilangan Berpangkat

Untuk menentukan formulasi perklian bilangan berpangkat dengan bilangan pokok yang sama atau tetap, sempurnakanlah Tabel 7.5 kolom tengah dan kolom paling kanan, amatilah dengan cermat serta formulasikan.

Tabel 7.5

Problem	Faktor	Pengelompokan	Nilai
2^5 x 2^1	$\underbrace{(2 x 2 x 2 x 2 x 2)}_{5\ faktor}$ x $\underbrace{(2)}_{1\ faktor}$	$\underbrace{2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2}_{6\ faktor}$	2^6
2^6 x 2^2	$\underbrace{(2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2)}_{6\ faktor}$ x $\underbrace{(2 x 2)}_{2\ faktor}$	$\underbrace{2 x 2 x 2 x ... x 2}_{8\ faktor}$	2^8
2^7 x 2^3	. . . . . .	. . .	. . .
2^8 x 2^4	. . . . . .	. . .	. . .
2^9 x 2^5	. . . . . .	. . .	. . .
… x …	. . . . . .	. . .	. . .
2^m x 2^n	$\underbrace{(2 x 2 x ... x 2)}_{m\ faktor}$ x $\underbrace{(2 x 2 x ... x 2)}_{n\ faktor}$	. . .	2^{m+n}
a^m x a^n	. . . . . .	. . .	. . .

Dari kajian pada Tabel 7.5, maka dapat didefinisikan.

Definisi 7.3

$\boxed{a^m \, x \, a^n = a^{m+n}}$; a ≠ 0, m dan n sebarang bilangan bulat

Contoh 7.2

a. $k^5 . k^{11} = k^{5+11} = k^{16}$

b. $y^4 . y^{-2} = y^{4+(-2)} = y^2$

c. $x^{-3} . x^{-4} = x^{-3+(-4)} = x^{-7}$

d. $hx^2 . h^3x^4 = h^{1+3}x^{2+4} = h^4x^6$

D. Pembagian Bilangan Berpangkat dengan Bilangan Pokok Tetap dan Perpangkatan Bilangan Berpangkat.

Pembagian bilangan berpangkat dengan bilangan pokok tetap dapat didefinsikan sebagai berikut.

Definisi 7.4

$\boxed{a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m=n}, a \neq 0}$, m dan n sebarang bilangan bulat.

Sedangkan perpangkatan bilangan berpangkat dapat didefiniskan seperti berikut.

Definisi 7.5

$\boxed{\left(a^m\right)^n = a^{m.n} = a^{mn}}$, $a \neq 0$, m dan n sebarang bilangan bulat.

Contoh 7.3

Jika a ≠ 0 maka

1. $\frac{a^{-3}}{a^{-5}} = \frac{\frac{1}{a^3}}{\frac{1}{a^5}} = \frac{1}{a^3} . \frac{a^5}{1} = a^2$ atau $\frac{a^{-3}}{a^{-5}} = a^{-3-(-5)} = a^{-3+5} = a^2$

2. $(a^3)^{-5} = \frac{1}{(a^3)^5} = \frac{1}{a^{3.5}} = \frac{1}{a^{15}}$ atau $(a^3)^{-5} = a^{3(-5)} = a^{-15} = \frac{1}{a^{15}}$

Perhatikan bahwa 0^n hanya dedefinisikan untuk bilangan bulat positif n. Mengapa untuk n bilangan bulat negative,m maka 0^n tidak didefinisikan?

Misalnya n = -3, definisi akan menghasilkan $0^{-3} = \frac{1}{0^3} = \frac{1}{0}$. Tetapi $\frac{1}{0}$ tidak didefinisikan.

Mengapa 0^0 tidak didefinisikan?.

Telah didefrisikan bahwa $a^0 = a^{m-m}, a \neq 0; m \neq 0$

$$= \frac{a^m}{a^m}$$

$$= 1$$

maka $0^0 = 0^{m-m}$, m $\neq 0$

$$= \frac{0^m}{0^m}$$

$= \frac{0}{0}$, sedangkan $\frac{0}{0}$ adalah bentuk tak tentu.

Jadi 0^0 juga tidak dedfinisikan.

E. Pangkat dari Perkalian dan Pembagian suatu Bilangan

Pangkat dari perkalian beberapa bilangan sama dengan perkalian dari pangkat tiap-tiap faktornya. Hal tersebut dapat didefinisikan sabagai berikut.

Definisi 7.6

$\boxed{(a \text{ x } b \text{ x } c)^n = a^n b^n c^n}$, a $\neq$ 0, b $\neq$ 0, dan c $\neq$ 0

Pangkat dari pembagian suatu bilangan dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 7.7

$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$, a $\neq$ 0, dan b $\neq$ 0

Bagaimana dengan n bilangan negatif seperti $\left(\frac{y}{x}\right)^{-n}$?. Hal ini dapat diselesaikan dengan mengacu pada sifat-sifat sebeliumnya.

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^n} = \frac{x^n}{y^n}$$

Jadi, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$, a $\neq$ 0, dan b $\neq$ 0; n sebarang bilangan bulat.

Contoh 7.4

Jika x $\neq$ 0, dan y $\neq$ 0, maka

1. $\left(\frac{2}{7}\right)^{11} = \frac{2^{11}}{7^{11}}$

2. $\left(\frac{5x^{-2}\,y}{7x}\right)^{3} = \frac{5^3\,x^{-6}\,y^3}{7^3\,x^3} = \frac{5^3\,y^3}{7^3\,x^9}$

F. Pangkat Bilangan Pecahan

Kita telah mendefinissikan bahwa $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ dan $(a^m)^n = a^{mn}$, untuk m dan n bilangan bulat. Definisi ini juga berlaku untuk m dan n bilangan pecah. Jadi untuk m = $\frac{p}{q}$ dan n = $\frac{r}{s}$ dengan p, q, r, dan s bilangan bulat dan q ≠ 0, s ≠ 0 berlaku:

(i) $a^m \cdot a^n = a^{\frac{p}{q}} . a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} = a^{m+n}$

(ii) $a^m : a^n = a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}} = a^{m-n}$

(iii) $\left(a^m\right)^n = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{pr}{qs}} = a^{mn}$

Jika m = n = $\frac{1}{2}$, maka $a^{\frac{1}{2}} . a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a$

Jika m = 2 dan n = $\frac{1}{2}$, maka $\left(a^2\right)^{\frac{1}{2}} = a^{2.\frac{1}{2}} = a$, sehingga $25^{\frac{1}{2}} = 5$

Ingat bahwa $-25^{\frac{1}{2}}$ berarti $-(25)^{\frac{1}{2}}$. Jadi $-25^{\frac{1}{2}} = -(25)^{\frac{1}{2}} = -(5^2)^{\frac{1}{2}} = -5$

Contoh 7.5

1. $-16^{\frac{1}{2}} = -4$
2. $0^{\frac{1}{2}} = 0$
3. $\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{2}.\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3}}$
4. $7^{\frac{2}{5}} . 7^{\frac{3}{4}} = 7^{\frac{2}{5}+\frac{3}{4}} = 7^{\frac{8+15}{20}} = 7^{\frac{23}{20}}$

RANGKUMAN

1. $\underbrace{a^n = a \, x \, a \, x \, a \, x \ldots . x \, a}_{n\ faktor}$; *a* disebut bilangan pokok dan *n* pangkat
2. Setiap bilangan jika dipangkat dengan nol hasilnya satu, yaitu $a^0 = 1$, sedangkan 0^n tidaka didefiniskan untuk n yang tidak positif.
3. Perkalian bilngan berpangkat yang bilangan pokoknya sama, pangkatnya dijumlahkan, sedangkan bilangan pokoknya tetap. $a^m \, x \, a^n = a^{m+n}$
4. Bilangan berpangkat dipangkatkan, bilangan pokoknya tetap, sedangkan pangkatnya dikalikan. $\left(a^m\right)^n = a^{m.n} = a^{mn}$

5. Bilangan pecahan yang dipangkatkan sama dengan memangkatkan pembilang dan penyebut.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{a^p\ c}{b^q}\right)^n = \frac{a^{np}\ c^n}{b^{nq}}$$

LATIHAN

1. $\left(3x^0 y^{-5} z^{-3}\right)^3 = \ldots.$
2. $\left(4x^{n+1} y^{m-1}\right)^r \left(32x^{1-n} y^{1-m}\right)^r = \ldots.$
3. $\left(\frac{3x^2}{y^{-5}}\right)^{-3} = \ldots.$
4. $\left(\frac{3x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{5}}}{9x^{-\frac{1}{5}}}\right)^{\frac{1}{3}} = \ldots.$
5. $3a^{\frac{1}{2}} . 9a^{n+\frac{1}{2}} = \ldots.$

DAFTAR PUSTAKA

Burker et. Al. 1984. *E*lementary *Algenbra*. USA: CSB College Publishing.

Daniel L. Anvil. 1979. *Intermediate Algebra.* Addision – Wesley Publishing Company, Inc.

Harry L, Nustad and Terry H. Wesner. 1987. *Principles of Elementary Algebra with Applicfationa.* USA: Wur C. Brown Publishers.

Harsbarcer, Ronald J. and Reynold, James J. 1978. *Algebra and Trigonometry.* California: Cole Publishing Company.

Joseph Hashisaki. 1983. *Theory and Applications of Mathematics for Elementary School Teachers.* New nYork: John Wiley & Sons.

Muhsetyo M, dkk. 2007. *Pembelajaran Matematika SD.* Jakarta: Universitas Terbuka.